Exercice corrigé - PGCG - PPCM

Exercice

1. (a) Montrer que 2025 est un carré parfait.
   (b) Soit $n \in N$. Montrer que si n est un multiple de 5 alors $\text{PGCD}(n^2+1;5) = 1$.
   (c) En déduire $\text{PPCM}(2026;5)$.
2. (a) Soit $n \in N$. Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 5 est 2 alors $\text{PGCD}(n^2+1;5) = 5$.
   (b) En déduire que $(47^2+1)^{2027}$ est un multiple de 5.

Corrigé :

1. (a) On a $45^2 = 45 \times 45 = 2025$. Comme $45 \in N$, 2025 est le carré d'un entier naturel, donc 2025 est un carré parfait.
   (b) Si n est un multiple de 5, alors il existe $k \in N$ tel que $n = 5k$. On a alors :

$$n^2+1 = (5k)^2+1 = 25k^2+1 = 5(5k^2)+1$$

   Le reste de la division euclidienne de n^2+1 par 5 est égal à 1. D'après l'algorithme d'Euclide :

$$\text{PGCD}(n^2+1;5) = \text{PGCD}(5;1) = 1$$

   (c) On remarque que $2026 = 2025+1 = 45^2+1$. Puisque $45 = 5 \times 9$ est un multiple de 5, d'après la question précédente (avec $n = 45$), on a $\text{PGCD}(2026;5) = 1$. Or, pour deux entiers naturels non nuls x et y, on sait que $\text{PGCD}(x;y) \times \text{PPCM}(x;y) = x \times y$. Ainsi :

$$\text{PPCM}(2026;5) = \frac{2026 \times 5}{\text{PGCD}(2026;5)} = \frac{2026 \times 5}{1} = 10130$$

2. (a) Si le reste de la division euclidienne de n par 5 est 2, alors il existe $q \in N$ tel que $n = 5q+2$. Calculons n^2+1 :

$$n^2+1 = (5q+2)^2+1 = 25q^2+20q+4+1 = 25q^2+20q+5 = 5(5q^2+4q+1)$$

   Ainsi, 5 divise n^2+1. Comme 5 divise également 5, on en déduit que :

$$\text{PGCD}(n^2+1;5) = 5$$

   (b) Effectuons la division euclidienne de 47 par 5 : $47 = 5 \times 9+2$. Le reste est 2. D'après la question 2.(a) (pour $n = 47$), $\text{PGCD}(47^2+1;5) = 5$, ce qui signifie que 47^2+1 est un multiple de 5. Il existe donc $m \in N$ tel que $47^2+1 = 5m$. En élevant à la puissance 2027 :

$$(47^2+1)^{2027} = (5m)^{2027} = 5 \times \left(5^{2026}m^{2027}\right)$$

   Comme $5^{2026}m^{2027} \in N$, $(47^2+1)^{2027}$ est bien un multiple de 5.