Suites adjacentes

Raouf Laroussi

October 2025

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_1 = 0$, $v_1 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$$

pour tout $n \geq 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminez leur limite commune.

Solution.

1) Étude des variations
Calculons les premiers termes :

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 2$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = 1, \quad v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}$$

$$u_3 = \frac{u_2 + v_2}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad v_3 = \sqrt{u_3 v_2}$$

Montrons par récurrence que $u_n < v_n$ pour tout $n \geq 1$:
Initialisation : $u_1 = 0 < 2 = v_1$
Hérédité : Supposons $u_n < v_n$. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < v_n$ et $u_{n+1} > u_n$ (car $v_n > u_n$).
Aussi,

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$$

Or, $u_{n+1} < v_n$ donc $v_{n+1} < v_n$.
Donc la suite (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
2) Montrons que les suites sont adjacentes
Rappel : Deux suites sont adjacentes si - (u_n) est croissante, - (v_n) est décroissante, - $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.
Nous avons montré les deux premières propriétés. Montrons la dernière.
Posons $d_n = v_n - u_n > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = u_n + \frac{d_n}{2}$$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

Soit :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} - u_{n+1}$$
$$= u_{n+1} \left(\sqrt{\frac{v_n}{u_{n+1}}} - 1 \right)$$

Mais $v_n > u_{n+1} > u_n$, donc $\frac{v_n}{u_{n+1}} > 1$, donc $v_{n+1} > u_{n+1}$ et $d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} < d_n$: ainsi la suite d_n décroît et elle est positive, donc convergente.

Montrons que $\lim d_n = 0$.

Supposons que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ avec $\ell \leq \ell'$. À la limite,

$$u_{n+1} \to \ell = \frac{\ell + \ell'}{2} \ell = \ell'$$

Donc les deux limites sont égales.

La différence d_n tend donc vers 0, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et admettent une même limite ℓ.

3) Détermination de la limite commune

À la limite, on a :

$$\ell = \frac{\ell + \ell}{2} = \ell$$
$$\ell = \sqrt{\ell \ell} = \ell$$

À partir de la définition, il n'y a pas d'autre condition, à part la cohérence du système.

Reprenons le système :

$$\ell = \frac{\ell + \ell}{2} \ell = \ell$$
$$\ell = \sqrt{\ell \ell} \ell = \ell$$

Autrement dit, la limite est l'unique point d'accumulation possible. Calculons numériquement les premiers termes pour s'assurer de la valeur :

- $u_1 = 0$, $v_1 = 2$ - $u_2 = 1$ - $v_2 = \sqrt{2} \approx 1.414$ - $u_3 = \frac{1+1.414}{2} \approx 1.207$ - $v_3 = \sqrt{1.207 \times 1.414} \approx 1.308$ - $u_4 \approx \frac{1.207+1.308}{2} \approx 1.2575$ - $v_4 = \sqrt{1.2575 \times 1.308} \approx 1.282$ - $u_5 = \frac{1.2575+1.282}{2} \approx 1.2697$ - $v_5 = \sqrt{1.2697 \times 1.282} \approx 1.2758$

On observe que les suites semblent tendre vers une valeur proche de 1.272. On peut conjecturer que leur limite commune est le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mais ici les valeurs numériques montrent une convergence rapide vers une valeur autour de 1.272.

La limite exacte est l'unique solution de $x = \sqrt{x \cdot x}$ qui est satisfaite par tout $x > 0$. L'encadrement numérique montre qu'il n'y a pas d'autre solution évidente. La limite commune ℓ est donc environ 1.272 (approximativement).

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et ont pour limite commune $\ell \approx 1.272$.