Série d'exercices sur les suites avec corrigé

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout n la suite (u_n) par : $u_n = 3n - 2$.
   Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{3}$.
   Calculer le $9^{\text{ième}}$ terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.
3. Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -2.
   Calculer u_{15}, puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$.

Exercice 2

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5}$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit u_n une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{81}$ et de raison -3.
   Calculer u_7, puis $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 4\,096$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

et la relation initiale $u_0 = 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 6$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ puis $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$.

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$
2. Le $9^{\text{ième}}$ terme est $u_8 = 5 + 8 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{3}$
   $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 9 \times \dfrac{5 + \frac{23}{3}}{2} = 57.$
3. $u_{15} = u_1 + 14 \times (-2) = -26$, $\quad u_7 = u_1 + 6 \times (-2) = -10$,
   et $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15} = 9 \times \dfrac{-10 - 26}{2} = -162.$
4. $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 11$ et de raison $r = 3$.
   Soit n l'indice du dernier terme : $u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow 173 = 11 + n \times 3 \Leftrightarrow n = 54$, il y a donc 55 termes dans la somme et : $S = 55 \times \dfrac{11 + 173}{2} = 5\ 060.$

Corrigé de l'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{7^{n+2}}{5} = 7 \times \dfrac{7^{n+1}}{5} = 7u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{7}{5}$ et de raison 7.
2. $u_7 = u_1 \times (-3)^6 = \dfrac{1}{81} \times (-3)^6 = 9$ et $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = \dfrac{1}{81} \times \dfrac{1 - (-3)^7}{1 - (-3)} = \dfrac{547}{81}$.
3. Σ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2
   Je cherche l'indice n du dernier terme : $u_n = u_0 q^n \Leftrightarrow 4\ 096 = 1 \times 2^n \Leftrightarrow n = 12$
   donc $\Sigma = 1 \times \dfrac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = 8\ 191.$

Corrigé de l'exercice 3

1. Calculer $u_1 = 4$, $u_2 = 5$ et $u_3 = \dfrac{11}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2} u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$.
   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$
3. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 6.$
4. On a : $S = -4 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = -\dfrac{1\ 023}{128}$
   et $S' = u_0 + u_1 \ldots + u_9 = v_0 + 6 + v_1 + 6 + \ldots v_9 + 6 = -\dfrac{1\ 023}{128} + 6 \times 10 = \dfrac{6\ 657}{128}$.