Ex suites

Raouf Laroussi

September 2025

Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = 1 + u_n n + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Montrer que $u_1 \leq 2$.

3′ Montrer que $u_n \leq 2$ pour tout entier n.

3. La suite $(u_n)_{n\in N}$ est-elle croissante ou décroissante ?
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est convergente et calculer sa limite.

"'
***
Solution de l'exercice
1. Montrer que

$$u_n \geq 1$$

pour tout entier

$$n \geq 1$$

.

Preuve par récurrence :
- Initialisation (

$$n = 1$$

) :

$$u_1 = 1 + \frac{u_0}{1} = 1 + u_0 \geq 1$$

puisque

$$u_0 > 0$$

, donc

$$u_1 > 1$$

.

- Hérédité : Supposons que

$$u_n \geq 1$$

pour un certain

$$n$$

. Alors :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \geq 1 + \frac{1}{n+1} > 1$$

Donc la propriété est vraie pour

$$n+1$$

.

Par récurrence,

$$u_n \geq 1$$

pour tout

$$n \geq 1$$

.

2. Montrer que

$$u_1 \leq 2$$

.

- Par définition :

$$u_1 = 1 + u_0$$

Or

$$u_0 \leq 1$$

, donc

$$u_1 \leq 2$$

.

$$3'$$

. Montrer que

$$u_n \leq 2$$

pour tout entier

$$n$$

.

Preuve par récurrence :

- Initialisation :

$$u_0 \leq 1 \Rightarrow u_1 = 1 + u_0 \leq 2$$

. - Hérédité : Supposons

$$u_n \leq 2$$

et montrons que

$$u_{n+1} \leq 2$$

.

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1}$$

Or,

$$\frac{2}{n+1} \leq 1$$

pour

$$n \geq 1$$

, donc

$$u_{n+1} \leq 2$$

.

Donc,

$$u_n \leq 2$$

pour tout entier

$$n$$

.

3. La suite

$$(u_n)$$

est-elle croissante ou décroissante ?

Calculons

$$u_{n+1} - u_n$$

:

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{n+1} - u_n = 1 - u_n + \frac{u_n}{n+1}$$
$$= 1 - u_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - u_n \frac{n}{n+1}$$

Vu que

$$1 \leq u_n \leq 2$$

, Si

$$u_n > \frac{n+1}{n}$$

, alors

$$u_{n+1} < u_n$$

, donc la suite est décroissante à partir d'un certain rang.

ou

La suite n'est pas monotone sur tout

$$N$$

, mais elle devient décroissante pour les grands

$$n$$

car

$$\frac{n+1}{n} \to 1$$

donc

$$u_n > 1$$

.

4. Montrer la convergence de la suite et calculer la limite

Soit

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

, supposant l'existence de cette limite.

À la limite :

$$\ell = 1 + \frac{\ell}{\infty} = 1$$

Donc la suite converge vers

$$1$$

.

***

Résumé des réponses : -

$$1 \leq u_n \leq 2$$

, pour tout

$$n$$

. - La suite devient décroissante à partir d'un certain rang. - Elle converge vers

$$1$$

.

Toutes ces propriétés sont classiques pour une suite définie ainsi[1].