Matrice mal conditionnée

Raouf Laroussi

August 2025

Exercice sur le conditionnement

On note pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Résolution des systèmes

a) Pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le système $A_\varepsilon x = b$ s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + (1+\varepsilon)x_2 = 2. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on obtient :

$$\varepsilon x_2 = 0 \implies x_2 = 0.$$

Puis, en substituant dans la première équation :

$$x_1 = 2.$$

La solution est donc :

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$

Le système devient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + (1+\varepsilon)x_2 = 2+\varepsilon. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde :

$$\varepsilon x_2 = \varepsilon \implies x_2 = 1.$$

En substituant dans la première équation :

$$x_1 = 1.$$

La solution est donc :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On voit qu'une légère modification du vecteur b change complètement le solution. Et on voit que le petit tε peut tout changer !