Gauss et Cholesky-Exercices corrigés

epsilon.tn

June 2025

Soit la matrice A et le vecteur b :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & a & -1 \\ a & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. On suppose que $a = 1$

(a) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en détaillant toutes les étapes de la méthode de Gauss.

(b) Déduire de la question précédente la factorisation LU de la matrice A.

(c) Utiliser la factorisation LU pour résoudre $Ax = c$ où $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Peut-on effectuer la factorisation de Cholesky de A ? Si oui, donner une matrice triangulaire inférieure D dont les termes de la diagonale sont positifs telle que $A = BB^T$.

2. On suppose que $a = 0$

(a) Peut-on appliquer la méthode de Gauss pour résoudre $Ax = b$, dans ce cas ?

(b) Calculer le déterminant de A.

(c) Quelle est la matrice D obtenue par la factorisation de Cholesky, dans ce cas ?

(d) Peut-on résoudre l'équation $Ax = b$ par la méthode de Cholesky, dans ce cas ?

Solutions des exercices
Pour $a = 1$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On forme le système augmenté :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 1 : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{5}L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5}L_1$

$$L_2 : (1, 1, 0, 1) - \frac{1}{5}(5, 1, -1, 4) = (0, 0.8, 0.2, 0.2)$$
$$L_3 : (-1, 0, 1, 0) + \frac{1}{5}(5, 1, -1, 4) = (0, 0.2, 0.8, 0.8)$$

Le système devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0.8 \end{array}\right)$$

Étape 2 : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{0.2}{0.8}L_2 = L_3 - 0.25L_2$

$$L_3 : (0, 0.2, 0.8, 0.8) - 0.25 \times (0, 0.8, 0.2, 0.2) = (0, 0, 0.75, 0.75)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.75 \end{array}\right)$$

Remontée (substitution arrière) :

$$x_3 = \frac{0.75}{0.75} = 1$$
$$0.8x_2 + 0.2x_3 = 0.2 \implies 0.8x_2 + 0.2 = 0.2 \implies x_2 = 0$$
$$5x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 4 \implies 5x_1 - 1 = 4 \implies x_1 = 1$$

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$