

Exercice corrigé sur les matrices

epsilon.tn

June 2025

Exercice :

Soit a et b deux nombres réels. On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB et BA .
2. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $AB = BA$?

Solution

1. Calcul de AB et BA

Calculons AB :

$$AB = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$AB = \begin{pmatrix} 1+ab & a & 1-a \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-b & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons BA :

$$BA = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 4 & 0 \\ b-1 & 1 & ab+1 \end{pmatrix}$$

2. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $AB = BA$?

On pose $AB = BA$, donc chaque élément correspondant doit être égal :

$$\begin{cases} 1 + ab = 2 \\ a = 1 \\ 1 - a = a - 1 \\ 1 - b = b - 1 \\ 2 = ab + 1 \end{cases}$$

Réolvons les équations :

* $a = 1$

* $1 - a = a - 1 \implies 1 - a = a - 1 \implies 2a = 2 \implies a = 1$ (déjà trouvé)

* $1 + ab = 2 \implies ab = 1$

* $1 - b = b - 1 \implies 2b = 2 \implies b = 1$

* $2 = ab + 1 \implies ab = 1$ (déjà trouvé)

Donc la seule solution est $a = 1$ et $b = 1$.

Réponse : $AB = BA$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 1$.