Exercice Gauss LU

epsilon.tn

June 2025

Exercice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 11 & 11 & 12 \\ -4 & -11 & 9 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Effectuer la factorisation LU de la matrice A.
2. En déduire le déterminant de la matrice A.
3. En utilisant la factorisation LU de la matrice A, résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution

1) Factorisation LU de la matrice A

On cherche L (triangulaire inférieure) et U (triangulaire supérieure) telles que $A = LU$.

Procédons par l'algorithme de Doolittle (diagonale de L égale à 1) :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 11 & 11 & 12 \\ -4 & -11 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Calculs :

$u_{11} = 2$
$l_{21} = \frac{-4}{2} = -2$ $l_{31} = \frac{4}{2} = 2$ $l_{41} = \frac{-4}{2} = -2$
$u_{12} = 1$ $u_{13} = 2$ $u_{14} = 1$
Calcul de la deuxième ligne de U :
$u_{22} = 1 - (-2) \times 1 = 1 + 2 = 3$ $u_{23} = -3 - (-2) \times 2 = -3 + 4 = 1$ $u_{24} = 1 - (-2) \times 1 = 1 + 2 = 3$
Calcul de l_{32} et l_{42} :
$l_{32} = \frac{11-2\times1}{3} = \frac{11-2}{3} = \frac{9}{3} = 3$ $l_{42} = \frac{-11-(-2)\times1}{3} = \frac{-11+2}{3} = \frac{-9}{3} = -3$
Calcul de la troisième ligne de U :
$u_{33} = 11-2\times2-3\times1 = 11-4-3 = 4$ $u_{34} = 12-2\times1-3\times3 = 12-2-9 = 1$
$l_{43} = \frac{9-(-2)\times2-(-3)\times1}{4} = \frac{9+4+3}{4} = \frac{16}{4} = 4$
Calcul de la quatrième ligne de U :
$u_{44} = -2 - (-2) \times 1 - (-3) \times 3 - 4 \times 1 = -2 + 2 + 9 - 4 = 5$
Ainsi,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

—

2) Déterminant de la matrice A
Le déterminant de A est le produit des diagonales de U :

$$\det(A) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

—

3) Résolution du système $Ax = b$ par la factorisation LU
On résout $LUx = b$.
Soit y tel que $Ly = b$, puis $Ux = y$.
<u>Étape 1 : $Ly = b$</u>

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ -2y_1 + y_2 = 0 \implies y_2 = 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \implies y_3 = 0 \\ -2y_1 - 3y_2 + 4y_3 + y_4 = 1 \implies y_4 = 1 \end{cases}$$

Donc $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
<u>Étape 2 : $Ux = y$</u>

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_4 = 1 \end{cases}$$

On remonte :
$x_4 = \frac{1}{5}$
$4x_3 + \frac{1}{5} = 0 \implies x_3 = -\frac{1}{20}$
$3x_2 + (-\frac{1}{20}) + 3 \times \frac{1}{5} = 0 \implies 3x_2 + (-\frac{1}{20}) + \frac{3}{5} = 0$
$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ donc :
$3x_2 - \frac{1}{20} + \frac{12}{20} = 0 \implies 3x_2 + \frac{11}{20} = 0 \implies x_2 = -\frac{11}{60}$
$2x_1 + (-\frac{11}{60}) + 2 \times (-\frac{1}{20}) + \frac{1}{5} = 0$
$2x_1 - \frac{11}{60} - \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0$
$-\frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{-1+2}{10} = \frac{1}{10}$
$2x_1 - \frac{11}{60} + \frac{1}{10} = 0 \implies 2x_1 = \frac{11}{60} - \frac{1}{10} = \frac{11}{60} - \frac{6}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$
$x_1 = \frac{1}{24}$
Donc la solution est :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \\ -\frac{11}{60} \\ -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$