Bac Info 2025 Principale

epsilon.tn

June 2025

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Session principale 2025

Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences de l'informatique
Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve : 3

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. (la page 4 sur 4 est à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 1 (5 points)

1. (a) Vérifier que $(3-3i)^2 = -18i$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 - 5(1+i)z + 17i = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et H d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1+4i$, $z_C = 4+i$ et $z_H = 1+2i$.
   (a) Placer sur la **figure 1** de l'annexe jointe les points A, B, C et H.
   (b) Montrer que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires en un point J dont on déterminera l'affixe.
   (c) Calculer $(z_H - z_A)(\overline{z_C} - \overline{z_B})$.
   (d) Déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. (a) Soit S l'aire du triangle ABC. Justifier que $S = 6$.
   (b) La demi-droite $[CH]$ coupe (AB) en un point K. Montrer que $CK = \frac{6}{5}\sqrt{10}$.
   (c) Déterminer l'affixe du vecteur $\vec{CH}$ et justifier que $CK = \frac{6}{5}CH$.
   (d) Déduire que l'affixe du point K est $z_K = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Exercice 2 (4,5 points)

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a + b = 2339$.

   (a) Soit $d = PGCD(a, b)$. Sachant que 2339 est un nombre premier, montrer que $d = 1$.

   (b) En déduire que 314 et 2025 sont premiers entre eux.

2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 2025x - 314y = 1$. Soit (x, y) une solution de (E).

   (a) Vérifier que $2025 \equiv 141\ [314]$.

   (b) Montrer que $141x \equiv 1\ [314]$. En déduire que $6909x \equiv 49\ [314]$.

   (c) Vérifier que $6909 \equiv 1\ [314]$ et déduire que $x \equiv 49\ [314]$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Exercice 3 (4,5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice A et en déduire que A est inversible.

2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $A \times B$.

   (b) Déterminer alors A^{-1} la matrice inverse de A.

3. On considère le système $(S) : \begin{cases} 3x + y + 4z = 40,6 \\ x + 2y + 2z = 29,2 \\ 3x + 3y + 5z = 60,2 \end{cases}$ où x, y et z sont des réels.

   (a) En utilisant l'écriture matricielle du système (S), montrer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 40,6 \\ 29,2 \\ 60,2 \end{pmatrix}$.

   (b) Résoudre alors le système (S).

4. Trois élèves E_1, E_2 et E_3 se rendent à une librairie pour acheter des cahiers de trois types : C_1, C_2 et C_3. Le tableau suivant résume leurs achats et les montants, en dinars tunisiens (DT), à payer par chacun d'eux.

Types	C_1	C_2	C_3	Montant à payer
Élèves				
E_1	3	1	4	40,6
E_2	2	4	4	58,4
E_3	3	3	5	60,2

On se propose de déterminer le prix de chaque type de cahiers.

   (a) Montrer que la situation se traduit par le système (S).
   (b) Trouver le prix de chaque type de cahiers.

Exercice 4 (6 points)

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - x - \ln x$.
   (a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) Montrer que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $1,3 < \alpha < 1,4$.
   (d) Déduire le tableau de signe de g sur $]0,+\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (x + \ln x)e^{-x}$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1+\ln x}{\frac{e^x}{x}}$.
   (c) Calculer alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.

4. (a) Montrer que $f(\alpha) > 0$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution β.
   (c) Montrer que $\ln(\beta) = -\beta$.
   (d) Déduire que $f'(\beta) = 1 + \beta$.

5. Dans l'annexe jointe (figure 2) on a placé les points A et B de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives α et β et on a représenté le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\beta \end{pmatrix}$.

   Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B. Tracer T et $\mathcal{C}$.