Exercice corrigé sur les suites

epsilon.tn

May 2025

Exercice

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 1}{U_n + 4} \end{cases} , \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.
   b) Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (U_n) ?

2. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 4 - \dfrac{15}{U_n + 4}$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 3$.
   c) Étudier la monotonie de la suite (U_n).

3. On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_0.
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) Exprimer U_n en fonction de V_n, puis en fonction de n.
   d) En déduire la limite de la suite (U_n).

4. a) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de (S_n).

5. Soient les suites (B_n) et (A_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_{n+1} = \dfrac{3}{5} B_n + V_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad A_n = \frac{B_n}{V_n}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

   a) Montrer que (A_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme A_0.
   b) Exprimer A_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de B_n en fonction de n.

Corrigé de l'exercice

Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = 3, \quad U_{n+1} = \frac{4U_n + 1}{U_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Calculs et conjectures

a) Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{4 \times 3 + 1}{3 + 4} = \frac{12 + 1}{7} = \frac{13}{7} \\
U_2 &= \frac{4 \times \frac{13}{7} + 1}{\frac{13}{7} + 4} = \frac{\frac{52}{7} + 1}{\frac{13}{7} + \frac{28}{7}} = \frac{\frac{59}{7}}{\frac{41}{7}} = \frac{59}{41} \\
U_3 &= \frac{4 \times \frac{59}{41} + 1}{\frac{59}{41} + 4} = \frac{\frac{236}{41} + 1}{\frac{59}{41} + \frac{164}{41}} = \frac{\frac{277}{41}}{\frac{223}{41}} = \frac{277}{223} \\
U_4 &= \frac{4 \times \frac{277}{223} + 1}{\frac{277}{223} + 4} = \frac{\frac{1108}{223} + 1}{\frac{277}{223} + \frac{892}{223}} = \frac{\frac{1331}{223}}{\frac{1169}{223}} = \frac{1331}{1169}
\end{aligned}$$

b) On observe que $U_0 = 3$, $U_1 \approx 1.86$, $U_2 \approx 1.44$, $U_3 \approx 1.24$, $U_4 \approx 1.14$. On peut conjecturer que la suite (U_n) est **décroissante** et semble converger vers 1.

2) Étude de la suite (U_n)

a) On a :

$$U_{n+1} = \frac{4U_n + 1}{U_n + 4} = \frac{(U_n + 4) \times 4 - 15}{U_n + 4} = 4 - \frac{15}{U_n + 4}$$

b) Montrons par récurrence que $1 \leq U_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $U_0 = 3$ donc $1 \leq U_0 \leq 3$.

Hérédité : Supposons $1 \leq U_n \leq 3$. Alors $U_n + 4 \geq 5 \implies \frac{15}{U_n+4} \leq 3$, et $U_n + 4 \leq 7 \implies \frac{15}{U_n+4} \geq \frac{15}{7}$.

Donc :

$$U_{n+1} = 4 - \frac{15}{U_n + 4}$$

Quand $U_n = 1$, $U_{n+1} = 4 - \frac{15}{5} = 1$. Quand $U_n = 3$, $U_{n+1} = 4 - \frac{15}{7} \approx 1.857$.

Donc $1 \leq U_{n+1} \leq 3$.

Conclusion : Par récurrence, $1 \leq U_n \leq 3$ pour tout n.

c) Pour la monotonie, calculons $U_{n+1} - U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n + 1}{U_n + 4} - U_n = \frac{4U_n + 1 - U_n(U_n + 4)}{U_n + 4} = \frac{4U_n + 1 - U_n^2 - 4U_n}{U_n + 4} = \frac{1 - U_n^2}{U_n + 4}$$

Or $U_n \geq 1$, donc $1 - U_n^2 \leq 0$, donc $U_{n+1} \leq U_n$.
La suite (U_n) est donc **décroissante**.

3) Étude de la suite (V_n)

On pose $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$.

a) Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n :
On sait que $U_{n+1} = \frac{4U_n + 1}{U_n + 4}$.
Calculons V_{n+1} :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1}$$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{4U_n + 1 - (U_n + 4)}{U_n + 4} = \frac{3U_n - 3}{U_n + 4} = 3\frac{U_n - 1}{U_n + 4}$$

$$U_{n+1} + 1 = \frac{4U_n + 1 + U_n + 4}{U_n + 4} = \frac{5U_n + 5}{U_n + 4} = 5\frac{U_n + 1}{U_n + 4}$$

Donc :

$$V_{n+1} = \frac{3(U_n - 1)}{5(U_n + 1)} = \frac{3}{5}V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme :

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b)

$$V_n = V_0 \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

c) On a $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1} \implies U_n = \frac{1 + V_n}{1 - V_n}$.
Donc :

$$U_n = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

d) Lorsque $n \to \infty$, $V_n \to 0$, donc $U_n \to \frac{1+0}{1-0} = 1$.
La suite (U_n) converge vers 1.

4) Étude de la somme S_n

a)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \right]$$

b) Lorsque $n \to \infty$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \to 0$, donc $S_n \to \frac{5}{4}$.

5) Étude des suites (B_n) et (A_n)

On a $B_0 = 0$, $B_{n+1} = \frac{3}{5} B_n + V_n$ et $A_n = \frac{B_n}{V_n}$.

a) Calculons A_{n+1} :

$$A_{n+1} = \frac{B_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{\frac{3}{5} B_n + V_n}{\frac{3}{5} V_n} = \frac{3}{5} \frac{B_n}{\frac{3}{5} V_n} + \frac{V_n}{\frac{3}{5} V_n} = \frac{B_n}{V_n} + \frac{5}{3}$$

Donc $A_{n+1} = A_n + \frac{5}{3}$: (A_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{5}{3}$ et $A_0 = 0$.

b)

$$A_n = n \cdot \frac{5}{3}$$

c)

$$B_n = A_n V_n = n \cdot \frac{5}{3} V_n = n \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n = \frac{5n}{6} \left(\frac{3}{5} \right)^n$$