

Question de Wiam sur Epsilon-Messenger

epsilon.tn

May 2025

EXERCICE 01

Soit ABC un triangle tel que :

$AB = \sqrt{7}$, $AC = 2$ et $BC = 3$

- 1) Calculer $\cos \widehat{BAC}$ puis montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$
- 2) On considère le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

a- Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$

b- Montrer que les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires.

EXERCICE 02

ABC est un triangle tel que : $AB = 2\sqrt{3}$ et $AC = 1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

- 1) Déterminer en radian une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
- 2) Soit I le milieu du segment $[BC]$.
 - a- Calculer la distance BC .
 - b- En déduire la valeur de la distance AI .

EXERCICE 03

ABC est un triangle tel que : $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$ et I le milieu du segment $[BC]$.

1) Calculer la distance AI .

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$.

a- Déterminer l'ensemble (φ) des points M vérifiant :
 $MA^2 + MB^2 = 20$.

b- Déterminer l'ensemble (φ) des points M vérifiant :
 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 7$.

EXERCICE 04

ABC est un triangle tel que : $AB = 3$ et $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

On considère I le milieu du segment $[BC]$ et D le point tel que : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$.

- 1) Construire une figure.
- 2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les distances BC et AI .
- 3) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- 4) Calculer $\cos \widehat{BAD}$.
- 5) Calculer la distance AD puis en déduire BD .

EXERCICE 05

Soit ABC un triangle tel que :

$AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $BC = 2$

- 1) a- Calculer $\cos \widehat{BAC}$.
- b- Prouver que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$.
- 2) On considère le point D tel que : $\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$
- a- Montrer que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

- b- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- c- En déduire la nature du triangle ABD .

EXERCICE 06

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que :

$AC = 10$, $OB = 2\sqrt{3}$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$

- 1) a- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
- b- En déduire que : $AB = \sqrt{7}$.
- 2) Montrer que $AB^2 + BC^2 = 74$ puis en déduire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$
- 3) On considère le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$
- a- Montrer que :

$$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{8} (AC^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

- b- En déduire que les droites (OE) et (AC) sont perpendiculaires.

EXERCICE 07

ABC est un triangle tel que :
 $AB = 6$ et $AC = 5$ et $BC = 7$

1) Montrer que :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{5}$$

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis déduire que $BA \cdot BC = 30$.

3) Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

Calculer la distance AH .

Solutions

Exercice 01

1) Par la formule du produit scalaire :

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = BC^2$$

$$7+4-2\sqrt{7} \times 2 \cos \widehat{BAC} = 911-4\sqrt{7} \cos \widehat{BAC} = 94\sqrt{7} \cos \widehat{BAC} = 2 \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = \sqrt{7} \times 2 \times \frac{1}{2\sqrt{7}} = 1$$

2)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Pour montrer que (MB) et (AC) sont perpendiculaires, il faut montrer que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MB} = -\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Donc (MB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 02

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 1$
 $2\sqrt{3} \times 1 \times \cos \widehat{BAC} = 1 \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Donc $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ radians.

2)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}$$
$$= (2\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = 12 + 1 - 2 \times 1 = 13 - 2 = 11 \quad BC = \sqrt{11}$$

I est le milieu de $[BC]$, donc

$$AI^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{2}(12+1) - \frac{1}{4} \times 11 = \frac{13}{2} - \frac{11}{4} = \frac{26-11}{4} = \frac{15}{4} \quad AI = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Exercice 03

1) I est le milieu de $[BC]$.

$$AI^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{2}(9+16) - \frac{1}{4} \times 36 = \frac{25}{2} - 9 = \frac{7}{2}$$

$$AI = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

2) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}$$

Mais on peut calculer explicitement en coordonnées si besoin.

a) $MA^2 + MB^2 = 20$ définit un cercle (lieu géométrique).

b) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 7$ définit l'ensemble des points M tels que le produit scalaire est constant (droite ou cercle selon le cas).

Exercice 04

1) Construction géométrique.

2)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 9 + 16 - 12 = 13 \quad BC = \sqrt{13}$$

$$AI^2 = \frac{1}{2}(9+16) - \frac{1}{4} \times 13 = \frac{25}{2} - \frac{13}{4} = \frac{50-13}{4} = \frac{37}{4} \quad AI = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

3) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$, donc produits scalaires à calculer avec les coordonnées.

4) $\cos \widehat{BAD}$ par produit scalaire.

5) $AD = 3 \times AI = \frac{3\sqrt{37}}{2}$, puis BD par formule du cosinus.

Exercice 05

1) a)

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1 + 2 - 4}{2 \times 1 \times \sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

2) $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ partage $[BC]$ en 2 : 1 à partir de B .

On trouve $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.

b) Calcul du produit scalaire.

c) Nature du triangle ABD selon les longueurs.

Exercice 06

1) a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos \widehat{AOB} = 10 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \times 3 = 30$

b) $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 100 + 12 - 60 = 52$

$AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

2) $AB^2 + BC^2 = 74$ puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

3) $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{8}(AC^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$

b) (OE) et (AC) perpendiculaires si produit scalaire nul.

Exercice 07

1)

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{36 + 25 - 49}{2 \times 6 \times 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 6 \times 5 \times \frac{1}{5} = 6$

$BA \cdot BC = 6 \times 5 = 30$

3) $AH = AB \sin \widehat{BAC} = 6 \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = 6 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{12\sqrt{6}}{5}$