Problème

epsilon.tn

May 2025

Partie A

On donne dans $\mathbb{R}$, le polynôme $Q(x) = x^2 - 2x$.

1. Calculer $Q(0)$ et $Q(2)$.
2. Justifier que :
   - pour tout nombre réel $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, $Q(x) < 0$;
   - pour tout nombre réel $x \in [0; 2]$, $Q(x) > 0$.

Partie B

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$.

$(\mathcal{C})$ désigne sa représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est le centimètre.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. (a) Calculer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

   (b) Calculer $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
3. (a) Justifier que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

   (b) Justifier que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = -x+4-\dfrac{1}{x-1}$.

   (c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x+4$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (d) Vérifier que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty; 1[$ et en dessous de (D) sur $]1; +\infty[$.
4. (a) Démontrer que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f'(x) = -\dfrac{Q(x)}{(x-1)^2}$.

(b) Déduire de la **Partie A**, le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

5. Dresser le tableau de variation de f sur D_f.

6. Démontrer que le point de coordonnées $(1;3)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.