Exercice corrigé sur les suites numériques

epsilon.tn

May 2025

Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1] \\ u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2)}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$, pour tout entier n .
2. Montrer que $u_n \leq 1$, pour tout entier n .
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante ou décroissante ?
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1] \\ u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2)}{4} \end{cases}$$

1. **Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier n .**

Preuve par récurrence :

Initialisation : $u_0 \in]0, 1]$, donc $u_0 > 0$.

Hérédité : Supposons $u_n \geq 0$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2)}{4}$$

Or $u_n \geq 0$ et $u_n + 2 \geq 2 > 0$, donc $u_{n+1} \geq 0$.

Conclusion : Par récurrence, $u_n \geq 0$ pour tout n .

2. **Montrer que $u_n \leq 1$ pour tout entier n .**

Preuve par récurrence :

Initialisation : $u_0 \leq 1$.

Hérédité : Supposons $u_n \leq 1$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2)}{4}$$

Or $u_n \leq 1$, donc $u_n + 2 \leq 3$ et $u_n \geq 0$ (question 1), donc

$$u_{n+1} \leq \frac{1 \times 3}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

Donc $u_{n+1} \leq 1$.

Conclusion : Par récurrence, $u_n \leq 1$ pour tout n .

3. **La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante ?**

Calculons la différence :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n + 2)}{4} - u_n = \frac{u_n(u_n + 2) - 4u_n}{4} = \frac{u_n(u_n + 2 - 4)}{4} = \frac{u_n(u_n - 2)}{4}$$

Or, d'après les questions précédentes, $0 < u_n \leq 1$, donc $u_n - 2 < 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n - 2)}{4} < 0$.

Conclusion : La suite (u_n) est décroissante.

4. **Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.**

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (question 1), donc elle converge.

Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{\ell(\ell + 2)}{4}$$

$$4\ell = \ell^2 + 2\ell$$

$$\ell^2 - 2\ell = 0$$

$$\ell(\ell - 2) = 0$$

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 2$.

Mais $u_n \leq 1$ pour tout n , donc la seule limite possible est $\ell = 0$.

Conclusion : La suite (u_n) converge vers 0.