

Exercice corrigé étude de fonctions

epsilon.tn

May 2025

A/ Soit f la fonction définie sur $[0, +\alpha[$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm).

- a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Montrer que pour tout $x \in]\frac{1}{2}, +\alpha[$, $f'(x) < 1$.
- d) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $] \frac{1}{2}, +\alpha[$ une unique solution α et que $0.7 < \alpha < 0.8$.
- e) Tracer C_f .

B/

- a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\alpha[$ sur un intervalle J à préciser.
- b) On désigne par g la fonction réciproque de f . Tracer C_g , la courbe représentative de g .
- c) Expliciter $g(x)$ pour tout $x \in J$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose pour tout $x \in J$, $F_n(x) = \int_0^{g(x)} f^n(t) dt$ et $\eta_n = F_n(\alpha)$.

- a) Montrer que pour tout $x \in J$, $F_2(x) = g(x) - x^2$.
- b) En déduire η_2 en fonction de α .

C/

- a) Montrer que F_n est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$, $F'_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$.
- b) Déterminer les réels a, b, c et k tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$,

$$\frac{2x^2}{1-x^2} = \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$

- c) Expliciter $F_1(x)$ pour tout $x \in J$.
- d) En déduire η_1 en fonction de α .
- e) Déterminer, en fonction de α , l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$.

D/

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in J$,

$$F_{n+2}(x) = \frac{2x^{n+2}}{n+2} + F_n(x) - \frac{2}{n+2} \int_0^x t^{n+2} dt$$

- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2n+2} = \frac{2\alpha^{2n+2}}{2n+2} + I_{2n} - \frac{2}{2n+2} \int_0^\alpha t^{2n+2} dt$$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2n} = \alpha - \sum_{k=1}^n \frac{2\alpha^{2k}}{2k}$$

- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2n} = \frac{2\alpha^{2n+2}}{2n+2} + I_{2n} - \frac{2}{2n+2} \int_0^\alpha t^{2n+2} dt$$

En déduire, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{2k}}{2k} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} = \alpha$$