

# Exercice corrigé Bac

epsilon.tn

May 2025

On considère l'équation différentielle :  $(E) : y' - y = (x^2 - 1)e^x$ .

1. Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $g(x) = h(x)e^x$ .
  - (a) Montrer que  $g$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $h'(x) = x^2 - 1$ .
  - (b) En déduire la fonction  $h$  sachant que  $h(0) = 0$ .
  - (c) Déterminer alors la fonction  $g$ .
2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $(f - g)$  est une solution de l'équation différentielle  $(E_0) : y' - y = 0$ .
  - (b) Résoudre  $(E_0)$ .
  - (c) Déterminer alors les solutions générales  $f$  de  $(E)$ .
3. Soit  $f$  une solution de  $(E)$ .

On désigne par  $(C_1)$  et  $(C_2)$  les courbes représentatives de  $f$  et  $f'$  respectivement.

Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par  $(C_1)$  et  $(C_2)$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 1$ .

  - (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer :  $\int_{-1}^1 x^2 e^x dx$ .
  - (b) En déduire la valeur de  $A$ .

## Solutions

1.

Soient  $g(x) = h(x)e^x$ .

a) Calculons  $g'(x)$  :

$$g'(x) = h'(x)e^x + h(x)e^x = (h'(x) + h(x))e^x$$

Donc,

$$g'(x) - g(x) = (h'(x) + h(x))e^x - h(x)e^x = h'(x)e^x$$

Or,  $g$  est solution de  $(E)$  si et seulement si :

$$g'(x) - g(x) = (x^2 - 1)e^x \implies h'(x)e^x = (x^2 - 1)e^x$$

Donc,

$$h'(x) = x^2 - 1$$

b) On intègre :

$$h(x) = \int (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x + C$$

Sachant que  $h(0) = 0$  :

$$h(0) = 0 = 0 - 0 + C \implies C = 0$$

Donc,

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

c) La fonction  $g$  est alors :

$$g(x) = h(x)e^x = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)e^x$$

## 2.

a) Soit  $f$  une solution de  $(E)$ . On a :

$$f'(x) - f(x) = (x^2 - 1)e^x$$

Or  $g$  est aussi solution de  $(E)$ , donc :

$$(f(x) - g(x))' - (f(x) - g(x)) = [f'(x) - g'(x)] - [f(x) - g(x)] = [f'(x) - f(x)] - [g'(x) - g(x)] = 0$$

Donc  $f - g$  est solution de  $(E_0) : y' - y = 0$ .

Réciproquement, si  $f - g$  est solution de  $(E_0)$ , alors  $f'(x) - g'(x) - [f(x) - g(x)] = 0$ , donc  $f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x) = (x^2 - 1)e^x$ , donc  $f$  est solution de  $(E)$ .

b) Résolvons  $(E_0) : y' - y = 0$ .

L'équation est linéaire homogène à coefficients constants, la solution générale est :

$$y(x) = Ke^x, \quad K \in \mathbb{R}$$

c) Les solutions générales de  $(E)$  sont donc :

$$f(x) = g(x) + Ke^x = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)e^x + Ke^x$$

ou encore,

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x + K\right)e^x$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ .

**3.**

a) Calculons  $\int_{-1}^1 x^2 e^x dx$  par intégration par parties.

Soit  $u = x^2$ ,  $dv = e^x dx$ .

Alors  $du = 2x dx$ ,  $v = e^x$ .

Donc,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

On intègre  $\int 2x e^x dx$  par parties à nouveau :

Soit  $u_1 = x$ ,  $dv_1 = e^x dx \implies du_1 = dx$ ,  $v_1 = e^x$ .

Donc,

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

Donc,

$$\int 2x e^x dx = 2(x e^x - e^x) = 2x e^x - 2e^x$$

Donc,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - [2x e^x - 2e^x] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

Donc,

$$\int_{-1}^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x]_{x=-1}^{x=1}$$

Calculons aux bornes :

Pour  $x = 1$  :

$$1^2 e^1 - 2 \cdot 1 e^1 + 2e^1 = (1 - 2 + 2)e^1 = 1e^1$$

Pour  $x = -1$  :

$$(-1)^2 e^{-1} - 2(-1)e^{-1} + 2e^{-1} = (1 + 2 + 2)e^{-1} = 5e^{-1}$$

Donc,

$$\int_{-1}^1 x^2 e^x dx = e^1 - 5e^{-1}$$

b) L'aire  $A$  est donnée par :

$$A = \left| \int_{-1}^1 [f(x) - f'(x)] dx \right|$$

Or, d'après (E),  $f'(x) - f(x) = (x^2 - 1)e^x \implies f(x) - f'(x) = -(x^2 - 1)e^x$

Donc,

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^1 -(x^2 - 1)e^x dx \right| = \left| - \int_{-1}^1 (x^2 - 1)e^x dx \right| \\ &= \left| - \left( \int_{-1}^1 x^2 e^x dx - \int_{-1}^1 e^x dx \right) \right| \end{aligned}$$

Or,

$$\int_{-1}^1 e^x dx = [e^x]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A &= \left| - \left( (e^1 - 5e^{-1}) - (e^1 - e^{-1}) \right) \right| \\ &= \left| - \left( e^1 - 5e^{-1} - e^1 + e^{-1} \right) \right| = \left| -(-4e^{-1}) \right| = 4e^{-1} \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{A = \frac{4}{e}}$$