

Ex 1 corrigé nombres complexes

epsilon.tn

May 2025

Exercice 1 :

On donne θ un réel tel que : $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ) :

$$a = 3i(2+i)(4+2i)(1+i) \quad \text{et} \quad b = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$$

Solution de l'exercice 1

On donne θ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

On considère :

$$a = 3i(2+i)(4+2i)(1+i)$$
$$b = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$$

1. Calcul du module et de l'argument de a

On écrit chaque facteur sous forme exponentielle :

$$2+i = \sqrt{5}(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{5}e^{i\theta}$$

$$4+2i = 2(2+i) = 2\sqrt{5}e^{i\theta}$$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc :

$$a = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{5}e^{i\theta} \cdot 2\sqrt{5}e^{i\theta} \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Calcul du module :

$$|a| = 3 \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = 6 \times 5 \times \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

Calcul de l'argument :

$$\arg(a) = \frac{\pi}{2} + \theta + \theta + \frac{\pi}{4} = 2\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 2\theta + \frac{3\pi}{4}$$

2. Calcul du module et de l'argument de b

On écrit chaque facteur sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned}4 + 2i &= 2\sqrt{5}e^{i\theta} \\ -1 + i &= \sqrt{2}e^{i(\pi - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ 2 - i &= \sqrt{5}e^{-i\theta} \\ 3i &= 3e^{i\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}b &= \frac{2\sqrt{5}e^{i\theta} \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{5}e^{-i\theta} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \cdot e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4} + \theta - \frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{5}\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Pour l'argument :

$$\arg(b) = \theta + \frac{3\pi}{4} - (-\theta) - \frac{\pi}{2} = 2\theta + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 2\theta + \frac{\pi}{4}$$

3. Réponses finales

$$|a| = 30\sqrt{2}, \quad \arg(a) = 2\theta + \frac{3\pi}{4}$$

$$|b| = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \arg(b) = 2\theta + \frac{\pi}{4}$$