

# Exercices 1, 2 et 3 Bac 2016

epsilon.tn

May 2025

## Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points

$A(1, 0, 0)$ ,  $B(-2, 1, -1)$  et  $C(0, 0, 1)$ .

- (1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .  
b) Dédire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan  $P$  dont une équation est :

$$x - z + 1 = 0.$$

- (2) On considère les points  $I(0, -1, -1)$  et  $J(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  et soit  $\Delta$  la droite passant par  $A$  et perpendiculaire à  $P$ .  
a) Montrer que la droite  $\Delta$  coupe le plan  $P$  en  $F$ .  
b) Calculer la distance  $IJ$ .

- (3) Soit  $S$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace vérifiant :

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4.$$

- a) Montrer que  $S$  est une sphère de centre  $I$  et de rayon  $R$  que l'on précisera.  
b) Montrer que le plan  $P$  coupe la sphère  $S$  suivant le cercle de centre  $H$  et de rayon  $r$  que l'on précisera.

- (4) Pour  $\theta \in [0, 2\pi[$ , on considère le point  $N$  :

$$N = (1 + \cos \theta, 1 + \sin \theta, 0).$$

- a) Vérifier que  $N$  est un point de la sphère  $S$ .  
b) Justifier que le point  $N$  n'appartient pas au plan  $P$ .  
c) Montrer que  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AN} = -5 \cos \theta$ .  
d) En déduire la valeur de  $\theta$  pour laquelle le volume du tétraèdre  $OABC$  est maximal.

## Exercice 2

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes :

$$(E) : z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0.$$

- 1)
  - a) Vérifier que  $(3 - i\sqrt{3})^2 = 6 - 6i\sqrt{3}$ .
  - b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
  - a) Construire le cercle  $(C)$  de centre  $O$  et passant par le point  $A$  d'affixe  $a = 1 + i\sqrt{3}$ .
  - b) Mettre chacun des nombres complexes  $b$  et  $c$  sous la forme algébrique.
  - c) En déduire que les points  $B$  et  $C$  appartiennent au cercle  $(C)$ .
  - d) Construire alors les points  $B$  et  $C$ .
- 3)
  - a) Montrer que  $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .
  - b) En déduire que le point  $O$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

## Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)e^{-x} - x$  et  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé.

- 1)
  - a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$  puis interpréter graphiquement ce résultat.
  - c) Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe  $(C)$ .
- 2) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a  $f'(x) = -xe^{-x}$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4)
  - a) Montrer que la courbe  $(C)$  admet un point d'inflexion  $P$  dont on précisera les coordonnées.
  - b) Soit  $T$  la tangente à la courbe  $(C)$  au point  $P$ .
  - c) Montrer que  $T$  a pour équation cartésienne  $y = \dots$
- 5) Construire la courbe  $(C)$  ainsi que sa tangente  $T$  au point  $P$ .