Série d'exercices Gauss - LU - Cholesky

epsilon.tn

April 2025

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre $Ax = b$ en détaillant toutes les étapes de la méthode de Gauss
2. Effectuer la factorisation LU de la matrice A.
3. En déduire la solution y du système linéaire $Ay = c$ où $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 6 \\ 15 & 26 & 7 \\ 6 & 7 & 17 \end{pmatrix}$

1. Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice D.
2. Résoudre les trois systèmes linéaires :

$$Dx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Dx' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Dx'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit C la matrice dont la première colonne est formée par le vecteur x, la deuxième colonne est formée par le vecteur x' et la troisième colonne est formée par le vecteur x''.

   Les vecteurs x, x', x'' étant ceux calculés dans la question précédente.

   Calculer les produits DC et CD. Conclure.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

1. Résoudre, en détaillant toutes les étapes de la méthode de Gauss, le système linéaire $Ax = b$.
2. Déduire de la question précédente la factorisation LU de A.
3. Déterminer $\det A$.

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle symétrique ?
2. Peut-on effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice A ?
3. Effectuer la factorisation LU de la matrice A.