

Exercice d'arithmétique

epsilon.tn

April 2025

Exercice 1

On pose : $N = ab(a^b - b^a)$, où $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a > b$.

1. Soit $p \geq 2$ un entier naturel premier tel que : $p - 1$ est un diviseur de 30.
 - (a) Montrer que : $N \equiv 0[p]$.
 - (b) Donner tous les valeurs possibles de p .
2. Montrer que N est divisible par 14322. On donne :

$$14322 = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 31.$$

Exercice 2

On considère dans \mathbb{Z}^2 , l'équation $(E) : 8x - 5y = 1$.

1.
 - (a) Justifier que l'ensemble des solutions de (E) est non vide.
 - (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .
2. Résoudre dans \mathbb{Z} le système (S) :

$$\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 2[5] \end{cases}$$

3. Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $(F) : 8x - 5y = 100$.
4. Un groupe de garçons et de filles a dépensé dans une excursion un montant de 1000DH. Chaque garçon a dépensé 80DH et chaque fille a dépensé 50DH.
Donner les répartitions possibles du groupe, en justifiant la réponse.

Exercice 3

Soit p et q deux entiers naturels premiers tels que :

$$p < q < 10^{p+q-1} = 1[pq].$$

1. (a) Montrer que : $p^q > 10^{p-1}$.
(b) Montrer que : $q^p > 10^{q-1}$.
(c) En déduire que : $pq > p + q$.
2. Décomposer 10^{p+q-1} en facteurs premiers, puis vérifier que :

$$q = 37.$$