

Corrigé de la série d'exercices

epsilon.tn

April 2025

Corrigé des exercices

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Méthode de Gauss pour $Ax = b$:

On écrit le système augmenté :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

On effectue $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2$:

$$L_3 = (0, -7, 0, -5) - \frac{7}{3}(0, -3, 2, -3) = (0, -7+7, 0-\frac{14}{3}, -5+7) = (0, 0, -\frac{14}{3}, 2)$$

Donc,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & 2 \end{array} \right)$$

On résout par remontée :

$$-\frac{14}{3}x_3 = 2 \implies x_3 = -\frac{3}{7}$$

$$-3x_2 + 2x_3 = -3 \implies -3x_2 + 2\left(-\frac{3}{7}\right) = -3 \implies -3x_2 - \frac{6}{7} = -3$$

$$-3x_2 = -3 + \frac{6}{7} = -\frac{15}{7} \implies x_2 = \frac{5}{7}$$

$$2x_1 + x_2 = 3 \implies 2x_1 + \frac{5}{7} = 3 \implies 2x_1 = \frac{16}{7} \implies x_1 = \frac{8}{7}$$

Donc la solution est :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

2. Factorisation LU de A :

On effectue les mêmes opérations que précédemment :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

En fait, les coefficients de L sont les multiplicateurs utilisés :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

U est la matrice triangulaire obtenue.

3. Solution de $Ay = c$ avec $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

On résout $LUy = c$:

1. Résoudre $Lz = c$:

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 0 - 1 \times 1 = -1 \\ z_3 = 1 - 2 \times 1 - \frac{7}{3} \times (-1) = 1 - 2 + \frac{7}{3} = -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

2. Résoudre $Uz = y$:

$$-\frac{14}{3}y_3 = \frac{4}{3} \implies y_3 = -\frac{2}{7}$$

$$-3y_2 + 2y_3 = -1 \implies -3y_2 + 2\left(-\frac{2}{7}\right) = -1 \implies -3y_2 - \frac{4}{7} = -1$$

$$-3y_2 = -1 + \frac{4}{7} = -\frac{3}{7} \implies y_2 = \frac{1}{7}$$

$$2y_1 + y_2 = 1 \implies 2y_1 + \frac{1}{7} = 1 \implies 2y_1 = \frac{6}{7} \implies y_1 = \frac{3}{7}$$

$$\text{Donc } y = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $D = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 6 \\ 15 & 26 & 7 \\ 6 & 7 & 17 \end{pmatrix}$.

1. Factorisation de Cholesky de D :

On cherche $D = LL^T$ avec L triangulaire inférieure.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

Calculs :

$$l_{11} = \sqrt{9} = 3$$

$$l_{21} = \frac{15}{3} = 5$$

$$l_{31} = \frac{6}{3} = 2$$

$$l_{22} = \sqrt{26 - 5^2} = \sqrt{26 - 25} = 1$$

$$l_{32} = \frac{7 - 2 \times 5}{1} = \frac{7 - 10}{1} = -3$$

$$l_{33} = \sqrt{17 - 2^2 - (-3)^2} = \sqrt{17 - 4 - 9} = \sqrt{4} = 2$$

Donc :

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Résolution des trois systèmes $Dx = e_i$:

On utilise la factorisation LL^T : Pour $Dx = e_1$:

$$Ly = e_1 \implies \begin{cases} 3y_1 = 1 \implies y_1 = \frac{1}{3} \\ 5y_1 + y_2 = 0 \implies y_2 = -\frac{5}{3} \\ 2y_1 - 3y_2 + 2y_3 = 0 \implies 2 \times \frac{1}{3} - 3 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 2y_3 = 0 \implies \\ \frac{2}{3} + 5 + 2y_3 = 0 \implies 2y_3 = -\frac{17}{3} \implies y_3 = -\frac{17}{6} \end{cases}$$

Puis $L^T x = y$:

$$\begin{cases} 2x_3 = -\frac{17}{6} \implies x_3 = -\frac{17}{12} \\ x_2 - 3x_3 = -\frac{5}{3} \implies x_2 = -\frac{5}{3} + 3 \times \frac{17}{12} = -\frac{5}{3} + \frac{17}{4} = \frac{17-20}{12} = -\frac{1}{4} \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = \frac{1}{3} \implies 3x_1 + 5\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\left(-\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{3} \\ 3x_1 - \frac{5}{4} - \frac{34}{12} = \frac{1}{3} \implies 3x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{4} + \frac{17}{6} \\ 3x_1 = \frac{4+15+34}{12} = \frac{53}{12} \implies x_1 = \frac{53}{36} \end{cases}$$

(On laisse les deux autres systèmes à calculer de la même manière.)

3. Calcul des produits DC et CD :

C est la matrice dont les colonnes sont les solutions précédentes. Par construction, $DC = I_3$ donc $C = D^{-1}$, donc $CD = I_3$. On conclut que C est l'inverse de D .

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Méthode de Gauss pour $Ax = b$:

Système augmenté :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$:

$$(3, -3, 2, 7) - 3 \times (1, 3, 0, 1) = (0, -12, 2, 4)$$

L_3 inchangé.

$L_2 \leftarrow (-12, 2, 4)$, L_3 inchangé.

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{-12}L_2 = L_3 + \frac{1}{6}L_2$:

$$(0, 2, -2, -2) + \frac{1}{6}(0, -12, 2, 4) = (0, 0, -2 + \frac{2}{6}, -2 + \frac{4}{6}) = (0, 0, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$$

Remontée :

$$-\frac{5}{3}x_3 = -\frac{4}{3} \implies x_3 = \frac{4}{5}$$

$$-12x_2 + 2x_3 = 4 \implies -12x_2 + 2 \cdot \frac{4}{5} = 4 \implies -12x_2 = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5} \implies x_2 = -\frac{1}{5}$$

$$x_1 + 3x_2 = 1 \implies x_1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 1 \implies x_1 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Donc } x = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

2. Factorisation LU de A :

Les multiplicateurs sont $l_{21} = 3$, $l_{32} = \frac{1}{6}$, donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

3. Déterminant de A :

$$\det(A) = 1 \times (-12) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = 20$$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle symétrique ?
Oui, car $A = A^T$.
2. Peut-on effectuer la factorisation de Cholesky de A ?
Calculons les pivots :

$$l_{11} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{21} = \frac{5}{2}$$

$$l_{22} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{4}} = \sqrt{-\frac{21}{4}}$$

Impossible, car le résultat sous la racine est négatif. Donc A n'est pas définie positive, la factorisation de Cholesky n'existe pas.

3. **Factorisation LU de A :**

$l_{21} = \frac{5}{4}$, donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 - \frac{5}{4} \times 5 = 1 - \frac{25}{4} = -\frac{21}{4} \end{pmatrix}$$