Bac 2023 Sc. Exp. Principale

Transrit par epsilon.tn

March 2025

Source: http://www.bacweb.tn/bac/2023/principale/sciences$_e x/math.pdf$

Exercice 1 (4 points)

Une étude statistique montre que dans une ville, 10% des personnes pubères sont atteintes par une maladie M.

On choisit au hasard un couple marié dans cette ville et on désigne par :

- A **l'événement : le mari est atteint par la maladie M ,**
- B **l'événement : l'épouse est atteinte par la maladie M .**

On admet que les événements A **et** B **sont indépendants.**

1. **Déterminer** $p(A \cap B)$ **et** $p(A \cup B)$**.**
2. **On considère les événements suivants :**

   M_0 : **Aucun des deux conjoints n'est atteint par la maladie M** ,
   M_1 : **Un seul conjoint est atteint par la maladie M** ,
   M_2 : **Le mari et son épouse sont atteints par la maladie M** .

   Justifier que $p(M_2) = 0{,}01$, $p(M_0) = 0{,}81$ **et** $p(M_1) = 0{,}18$.
3. **Ce couple vient d'avoir un nouveau-né.**

   On note E **l'événement : Le nouveau-né est atteint par la maladie M .**

   L'étude montre que la probabilité qu'un nouveau-né soit atteint par la maladie M est égale à :

   - $0{,}02$ **si aucun de ses parents n'est atteint par la maladie M,**
   - $0{,}1$ **si un seul de ses parents est atteint par la maladie M,**
   - $0{,}25$ **si ses deux parents sont atteints par la maladie M.**

   a) **Déterminer** $p(E \cap M_2)$, $p(E \cap M_0)$ **et** $p(E \cap M_1)$.
   b) **En déduire que** $p(E) = 0{,}0367$.

c) **Calculer la probabilité qu'aucun des parents n'est atteint par la maladie M sachant que leur nouveau-né est atteint. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4}.**

4. **On choisit au hasard n nouveaux nés dans cette ville, où n est un entier supérieur ou égal à 2.**

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de nouveaux nés atteints par la maladie M, parmi les n nouveaux nés choisis. On suppose que X suit une loi binomiale.

   a) **Déterminer les paramètres de X.**

   b) **Déterminer la probabilité p_n qu'aucun des nouveaux nés ne soit atteint par la maladie M.**

   c) **Déterminer la plus grande valeur de n pour que $p_n \geq 0{,}75$.**

Exercice 2 (5.5 points)
On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 + (1 - 3i\sqrt{3})z - 8 = 0$.
A/

a) **Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $(3 - i\sqrt{3})^2$.**

b) **Résoudre l'équation (E).**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Dans la figure 1 de l'annexe, les points I et A sont d'affixes respectives 1 et $a = 1 + i\sqrt{3}$.

2.a) **Vérifier que $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire $\frac{1}{a}$ et a^2 sous forme exponentielle.**

2.b) **Construire dans la figure 1, les points B et C d'affixes respectives $\frac{1}{a}$ et a^2.**

B/ Dans la figure 1 de l'annexe, M est un point de la droite (IA) d'affixe z et distinct de I.
On désigne par N, P et P' les points d'affixes respectives z^2, $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$.

1. **Justifier que $\mathbf{Re}(z) = 1$.**

Dans la suite, on pose $z = 1 + ib$, où b est un réel non nul.

2.a) **Montrer que les droites (MN) et (OM) sont perpendiculaires.**

2.b) **Vérifier que $\mathbf{Im}(z^2) = 2\,\mathbf{Im}(z)$.**

2.c) **Construire alors le point N.**

3.a) **Montrer que les points O, P et P' sont alignés.**

3.b) Justifier que les points I et P sont distincts.

3.c) Montrer que le point P appartient au cercle de diamètre $[OI]$.

3.d) Construire alors le point P.

Exercice 3 (3.5 points)
Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x} dx \quad \textbf{et} \quad v_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}} dx.$$

1. a) **Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$.**
b) **Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et montrer que $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \frac{1}{2}$.**

2. a) **Montrer que**

$$\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pour tout réel x tel que $1 \leq x \leq 1+\frac{1}{n}$.
b) **En déduire que**

$$\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times u_n \leq v_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times u_n.$$

c) **Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 v_n$.**

Exercice 4 (7 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x} + x$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
I)

a) **Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement.**

b) **Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.**

c) **Montrer que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.**

d) **Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D).**

II) Dans la figure 2 de l'annexe, (Γ) est la courbe de la fonction f' dérivée de f.
La courbe (Γ) admet une unique tangente horizontale au point $F\left(1,-\frac{4}{e}\right)$.

a) **En utilisant le graphique, justifier que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α. Vérifier que $\alpha \in (0, 1)$.

2.a) Soit f'' la fonction dérivée seconde de f. Utiliser le graphique pour déterminer $f'(1)$ et le signe de $f''(x)$.

2.b) Montrer que E est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

2.c) Montrer que E est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

3.a) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $A\left(1, -\frac{4}{e}\right)$.

b) Vérifier que le point $G(3, 3)$ appartient à $(\mathcal{C})$.

c) Justifier que QF est un vecteur directeur de (T).

d) Utiliser le graphique pour déterminer l'équation de (T). Puis placer le point E.

e) Vérifier que le point $J(0, 1)$ appartient à $(\mathcal{C}) \cap (D)$.

4.a) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = -1$ et les courbes $(\mathcal{C})$ et (D).

i) Montrer que $\int_{-1}^{0} (x + 1)e^{-x} dx = e - 2$.

ii) Calculer $\mathcal{A}$.

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2023)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

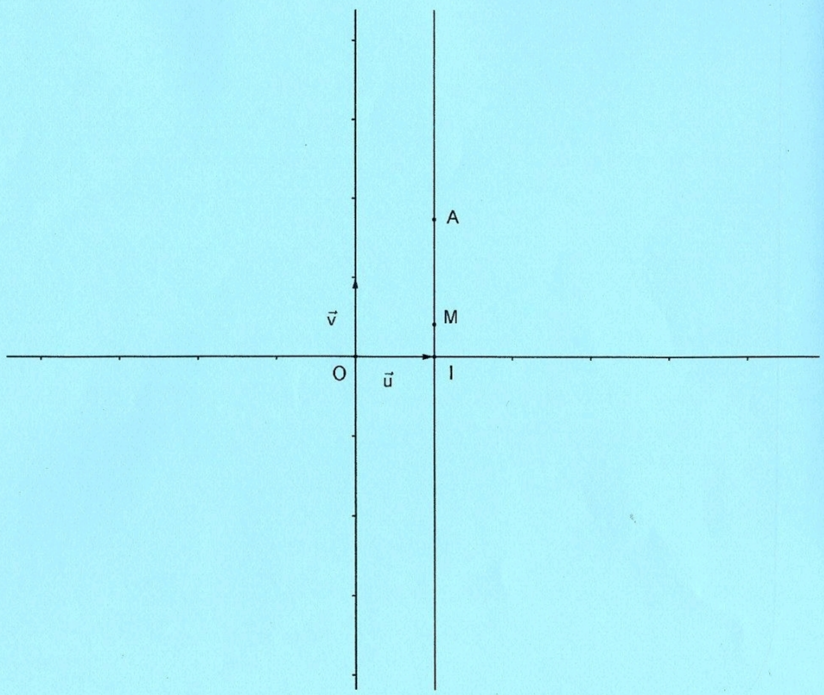

Figure 2