Exercices sur les suites

epsilon.tn

March 2025

Exercice 1 :

Étudier la limite des suites suivantes lorsque $n \to \infty$:

a) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

b) $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ (discuter suivant la valeur relative des réels $a > 0$ et $b > 0$)

Corrigé de l'exercice 1

a) To analyze the limit of this sequence as n approaches infinity, we can divide both the numerator and the denominator by 3^n:

$u_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

As $n \to \infty$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ because $\frac{2}{3} < 1$. Therefore,

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{0-1}{0+1} = -1$

b) $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

Here, we need to consider different cases based on the relative values of a and b:

Case 1: $a > b > 0$

In this case, divide both the numerator and the denominator by a^n:

$u_n = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Since $a > b$, we have $\frac{b}{a} < 1$, so as $n \to \infty$, $\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$. Thus,

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Case 2: $b > a > 0$

In this case, divide both the numerator and the denominator by b^n:

$u_n = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$

Since $b > a$, we have $\frac{a}{b} < 1$, so as $n \to \infty$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n \to 0$. Thus,

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{0-1}{0+1} = -1$

Case 3: $a = b > 0$

In this case,

$u_n = \frac{a^n - a^n}{a^n + a^n} = \frac{0}{2a^n} = 0$

Therefore, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Summary of Results for Part b

If $a > b > 0$, then

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

.

If $b > a > 0$, then

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -1$$

.

If $a = b > 0$, then

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

.

Exercice 2 :

Étudier la limite des suites suivantes lorsque $n \to \infty$:

a) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}} \quad (n \geq 1)$

b) $u_n = \frac{n^2+\cos n}{3(n+1)^2 \sin 5n}$

c) $u_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{5n-6} \quad (n \geq 1)$

Corrigé de l'exercice 2

—

a)

$$u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$$

On analyse le comportement de u_n lorsque n $\to \infty$.

- Le terme dominant au numérateur est $2n$, et celui du dénominateur est $3n$.

- Les termes $(-1)^n$ et $(-1)^{n+1}$ deviennent négligeables lorsque n $\to \infty$.

Ainsi :

$$u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}} = \frac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{3+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

Lorsque $n \to \infty$, les termes $\frac{(-1)^n}{n}$ et $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tendent vers 0. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

—

b)

$$u_n = \frac{n^2+\cos n}{3(n+1)^2 \sin 5n}$$

On analyse le comportement de u_n lorsque $n \to \infty$.

- Le terme dominant au numérateur est n^2 , et celui du dénominateur est $3(n+1)^2 = 3(n^2+2n+1)$.

- La fonction sinus oscille entre -1 et 1, ce qui complique l'étude de la limite.

Ainsi :

$$u_n = \frac{n^2+O(1)}{3(n^2+2n+1)\sin 5n}.$$

Pour des valeurs de $n > 0, |\sin 5n| > 0$,

u_n diverge car la fonction sinus oscille sans se stabiliser. **La suite ne converge pas.**

—

c)

$$u_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 3n + 1}}{5n - 6}$$

On analyse le comportement de cette suite lorsque

$$n \to \infty$$

.

- Le terme dominant sous la racine au numérateur est $4n^2$, ce qui donne approximativement $\sqrt{4}n = 2n$. - Au dénominateur, le terme dominant est $5n$.

Ainsi :

$$u_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 3n + 1}}{5n - 6} = \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}}{5 - \frac{6}{n}}.$$

Lorsque $n \to \infty$, les termes

$$\frac{3}{n}, \frac{6}{n}, et \frac{1}{n^2}$$

tendent vers zéro. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sqrt{4}}{5} = \frac{2}{5}.$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{5}.$$