Exercice corrigé sur les suites

epsilon.tn

March 2025

Exercice : Calcul des dérivées $n^{\text{ième}}$

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de chacune des fonctions :

$$y(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad z(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Application : Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction :

$$u(x) = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Solution

1. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $y = \frac{1}{x+1}$

On écrit y sous forme exponentielle :

$$y = (x+1)^{-1}.$$

La formule générale pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de la forme $(ax+b)^k$ est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(ax+b)^{k-n}(a)^n.$$

Ici, $k = -1$, $a = 1$, et $b = 1$. Donc :

$$y^{(n)}(x) = (-1)(-2)(-3)\dots(-n)(x+1)^{-n-1} = (-1)^n n!(x+1)^{-n-1}.$$

2. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $z = \frac{1}{x-1}$

De manière similaire, on écrit z sous forme exponentielle :

$$z = (x-1)^{-1}.$$

En utilisant la même formule que ci-dessus :

$$z^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x-1)^{-n-1}.$$

3. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $u(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

On remarque que :

$$u(x) = y(x) + z(x).$$

Pour calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de u, il suffit d'ajouter les dérivées $n^{\text{ième}}$ de y et de z.