Exercice corrigé sur les suites

epsilon.tn

March 2025

Exercice

Soient u_0, a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque $a = 1$? Lorsque que $b = 0$ et $a \neq 1$?
2. Exprimer u_n dans les deux cas particuliers de la question 1.
3. Dans le cas général, calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de u_0, a et b.
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :
$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}, \quad n \in N^*$$
5. On suppose que $a \neq 1$. Démontrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$
6. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in N^*$,
$$u_n = \frac{a^n(u_0 - \frac{b}{1-a}) - \frac{b}{1-a}}{a - 1}$$

7. On suppose dans cette question que $a > 1$ et que $au_0 + b > u_0$. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$ a pour limite $+\infty$.

8. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite ne dépend pas de u_0.

Solution

Soient u_0, a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1.
   - Si $a = 1$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique.
   - Si $b = 0$ et $a \neq 1$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique.

2.
   - Si $a = 1$, $u_n = u_0 + nb$.
   - Si $b = 0$, $u_n = a^n u_0$.

3. On a :

   - $u_1 = au_0 + b$
   - $u_2 = a(au_0 + b) + b = a^2 u_0 + ab + b$
   - $u_3 = a(a^2 u_0 + ab + b) + b = a^3 u_0 + a^2 b + ab + b$

4. Démontrons par récurrence que $u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k$, pour $n \in N^*$.

   - Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = a^1 u_0 + b\sum_{k=0}^{0} a^k = au_0 + b$.
   - Hérédité : Supposons que $u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k$ est vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b \\ &= a\left(a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) + b \\ &= a^{n+1} u_0 + b\sum_{k=0}^{n} a^k \end{aligned}$$

- Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in N^*$.

5. On suppose que $a \neq 1$. Démontrons que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

(C'est la somme des termes d'une suite géométrique)

6. Déduisons-en que pour tout $n \in N^*$,

$$u_n = a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{a^n(u_0(a-1) + b) - b}{a - 1}$$

7. On suppose que $a > 1$ et $au_0 + b > u_0$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Comme $a > 1$, $a^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. De plus $au_0 + b > u_0 \iff b > u_0(1-a) \iff u_0(a-1) + b > 0$. Ainsi, $u_n = \frac{a^n(u_0(a-1)+b)-b}{a-1}$ tend vers $+\infty$.

8. On suppose que $0 < a < 1$. Montrons que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite ne dépend pas de u_0. Comme $0 < a < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-b}{a-1} = \frac{b}{1-a}$.