

# Exercices corrigés - Nombres complexes

epsilon.tn

March 2025

## Exercice 1

On donne deux nombres réels  $a$  et  $\theta$ . Calculer le module et du nombre complexe :

$$z = \frac{1 + i \tan \theta}{1 + i \tan^2 \theta}.$$

## Exercice 2

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - i, \quad z_3 = 2i\sqrt{3} - 2.$$

Calculer :

$$z_1 + z_2, \quad z_1 z_2, \quad z_1 z_3, \quad (z_1)^2, \quad (z_2)^3.$$

Expliciter  $z_1$ ,  $z_2$ , et tous les résultats sous la forme algébrique la plus simple.

## Exercice 3

Étant donné le nombre complexe  $z = 1 + i\sqrt{3}$ , démontrer que les images dans le plan complexe des nombres :

$$z, \quad z^2, \quad z^3$$

sont cocycliques.

## Exercice 4

Soit le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\alpha$ . Calculer, en fonction de  $\alpha$ , le module et l'argument du nombre :

$$Z = 1 + z + z^2.$$

### Exercice 5

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes  $z$  et  $z'$  de module 1 vérifiant  $zz' + 1/zz' = 0$ , le nombre :

$$Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$$

est réel. (On remarquera que  $Z$  est réel si et seulement si  $Z = \overline{Z}$ ).

### Exercice 6

On considère le nombre complexe  $u = -2 - 2i\sqrt{3}$ .

1° Mettre  $u$  sous forme trigonométrique et en déduire tous les complexes  $Z$  tels que  $Z^4 = u$ .

2° Déterminer, par la méthode algébrique, les nombres complexes  $X$  tels que  $X^4 = u$ , puis les nombres complexes  $Z$  tels que  $Z^4 = u$ .

3° En déduire des expressions de  $\sin \frac{\pi}{12}$  et de  $\cos \frac{\pi}{12}$  sous forme de radicaux simples.

### Exercice 7

Calculer le module et l'argument du nombre complexe :

$$z = \frac{4}{1+i}$$

Calculer, de deux façons différentes les racines carrées de ce nombre.

### Exercice 8

Calculer le module et l'argument du nombre complexe :

$$z = (1-i)(5i)(1+i \sin \theta), \quad (\text{où } 0 < \theta < 2\pi).$$

Quelles sont les racines carrées de ce nombre ?

### Exercice 9

Calculer les racines cubiques du nombre complexe :

$$z = -8.$$

### **Exercice 10**

Déterminer les racines cubiques du nombre complexe :

$$z = 4\sqrt{2}(i - 1).$$

### **Exercice 11**

Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe :

$$z = 8(i - 1).$$

### **Exercice 12**

Déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe :

$$z = 32i.$$