

# Exercice corrigé sur la fonction gamma

epsilon.tn

March 2025

Soit  $a > 1$ . Montrer, en justifiant les calculs, que

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \frac{1}{e^x - 1} dx = \Gamma(a) \xi(a),$$

avec

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad \text{et} \quad \xi(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}, \quad a > 1.$$

(Indication : On utilisera le développement :

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}, \quad \forall x > 0.)$$

é de l'exercice

Soit  $a > 1$ . Montrons que :

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \frac{1}{e^x - 1} dx = \Gamma(a) \xi(a),$$

avec

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad \text{et} \quad \xi(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}.$$

## Étapes de la démonstration

1. **\*\*Utilisation du développement donné\*\*** On utilise le développement suivant :

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}, \quad \forall x > 0.$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$I = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \frac{1}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \right) dx.$$

2. **\*\*Échange de la somme et de l'intégrale\*\*** Sous réserve de convergence, on peut échanger la somme et l'intégrale :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-nx} dx.$$

3. **\*\*Changement de variable\*\*** Posons  $u = nx$ , ce qui implique  $x = u/n$  et  $dx = du/n$ . Les bornes restent inchangées ( $u : 0 \rightarrow +\infty$ ). L'intégrale devient :

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-nx} dx = n^{-a} \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du.$$

Or, par définition de la fonction Gamma :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du.$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-nx} dx = n^{-a} \Gamma(a).$$

4. **\*\*Retour à la somme\*\*** En substituant dans la somme, on obtient :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-a} \Gamma(a).$$

Factorisons  $\Gamma(a)$ , qui est indépendant de  $n$  :

$$I = \Gamma(a) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-a}.$$

5. **\*\*Expression finale\*\*** La série  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-a} = \xi(a)$ , par définition de la fonction zêta de Riemann pour  $a > 1$ . Ainsi :

$$I = \Gamma(a) \xi(a).$$

## Conclusion

Nous avons montré que :

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \frac{1}{e^x - 1} dx = \Gamma(a) \xi(a).$$