Exercice corrigé Gauss LU

epsilon.tn

March 2025

On considère le système linéaire $Ax = b$ où A, x et b sont donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la solution x, si elle existe, en détaillant toutes les étapes de la méthode de Gauss.

2. En déduire la factorisation LU de A.

3. On donne :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Résoudre les systèmes suivants en utilisant la factorisation LU de A :

   (a) Résoudre le système $Ax = b_1$.
   (b) Résoudre le système $Ax = b_2$.
   (c) Résoudre le système $Ax = b_3$.

4. Déduire des questions précédentes la matrice inverse A^{-1} de A.

Solution

On a le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Méthode de Gauss

On applique la méthode de Gauss pour résoudre le système. On commence par écrire la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ -4 & 0 & -1 & | & 3 \\ 6 & 7 & 8 & | & 2 \end{pmatrix}$$

* $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 3 \\ 6 & 7 & 8 & | & 2 \end{pmatrix}$$

* $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 4 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

* $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \end{pmatrix}$$

Maintenant, on résout le système triangulaire supérieur :

* $-4x_3 = -4 \Rightarrow x_3 = 1$ * $2x_2 + 3x_3 = 3 \Rightarrow 2x_2 + 3(1) = 3 \Rightarrow 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ * $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 0 + 2(1) = 0 \Rightarrow 2x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = -1$

Donc, la solution est $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Factorisation LU

Les multiplicateurs utilisés lors de l'élimination de Gauss sont : * $m_{21} = -4/2 = -2$ * $m_{31} = 6/2 = 3$ * $m_{32} = 4/2 = 2$

La matrice L est donc :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice U est la matrice triangulaire supérieure obtenue après l'élimination de Gauss :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La factorisation LU de A est $A = LU$, où L et U sont données ci-dessus.

3. Résolution de $Ax = b_i$ avec LU

On utilise la factorisation LU pour résoudre les systèmes $Ax = b_i$.

a) $Ax = b_1$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

* On résout $Ly = b_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 1$, $-2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 2$, $3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow 3 + 4 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -7$
Donc $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

* On résout $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$-4x_3 = -7 \Rightarrow x_3 = \frac{7}{4}$, $2x_2 + 3x_3 = 2 \Rightarrow 2x_2 + \frac{21}{4} = 2 \Rightarrow 2x_2 = -\frac{13}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{13}{8}$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 - \frac{13}{8} + \frac{14}{4} = 1 \Rightarrow 2x_1 = 1 + \frac{13}{8} - \frac{28}{8} = \frac{8+13-28}{8} = -\frac{7}{8} \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{16}$ Donc $x = \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{13}{8} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$.

b) $Ax = b_2$

$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* On résout $Ly = b_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 0$, $-2y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$, $3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow 2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -2$

Donc $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

* On résout $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$-4x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$, $2x_2 + 3x_3 = 1 \Rightarrow 2x_2 + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow 2x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{4}$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{8}$ Donc $x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $Ax = b_3$

$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

* On résout $Ly = b_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 0$, $-2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$, $3y_1 + 2y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 1$ Donc $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* On résout $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$-4x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{4}$, $2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 2x_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{8}$, $2x_1+x_2+2x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1+\frac{3}{8}-\frac{2}{4} = 0 \Rightarrow 2x_1 = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{16}$ Donc $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

4. Matrice Inverse A^{-1}

Les solutions des systèmes $Ax = b_1$, $Ax = b_2$ et $Ax = b_3$ sont les colonnes de la matrice inverse A^{-1}. Par conséquent,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ -\frac{13}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$