Chapitre II

Résolution d'équations non linéaires

On donne dans ce chapitre des méthodes numériques pour résoudre le problème : Trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = 0$$

où f est une fonction donnée.

$$f(x) = ax + b = 0$$

$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$ **si $a \neq 0$**

Si $a = 0$ alors l'équation devient $0x + b = 0$

Deux cas : si $b \neq 0$ alors le problème n'admet pas de solution.

Si $b = 0$ alors l'équation devient $0x + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0x = 0$

le problème admet une infinité de solutions : toute valeur de x est solution du problème.

Equation du second du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Δ=$b^2 - 4ac$

Trois cas :

1er cas : Si Δ>0 l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème cas : Si Δ=0 l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule solution : $x = \frac{-b}{2a}$

3ème cas : Si Δ<0 l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On commence par répondre à la question de l'existence et de l'unicité de la solution.

Il s'agit de répondre à la question : Ce problème admet-il des solutions ? Si oui déterminer leur nombre.

$f(x) = x^2$+3x+1= 0

Equation du second degré.

Δ=9-4=5>0

Deux solutions $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Méthode analytique.

$f(x) = sin\, x + e^x - ln\, x = 0$

$sin\, x = 0 \iff x = k\, pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = sin\, x + ln\,(x^2) + e^x = 0$ Je ne sais pas résoudre analytiquement cette équation.

Résoudre :

$$f(x) = sin\, x = 0$$

Cette équation admet-elle des solutions ? Si, oui combien ?

Oui, une infinité de solutions : S=$\{k\, pi\, , k \in \mathbb{Z}\}$.

On a alors recours aux méthodes numériques.

Exemple :

(1) $f(x) = x^3$+3x+1= 0

Remarque :

Avant de résoudre l'équation, il faut répondre à la question suivante :

Cette équation admet-elle des solutions ? Si oui, combien ?

Domaine de définition de f = $\mathbb{R}$,

$f(x)$=$x^3 + 3x + 1$, $f(0)$=1 , , $f(-1)$=-3

f est continue ;

f est dérivable : $f'(x)$=3x^2+3 > 0 .

Donc f est strictement croissante. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ =+∞ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ =-∞

Tableau de variation :

Il y a une seule solution α∈$[-1, 0]$.

D'après le tableau de variation, on peut dire que l'équation admet une solution unique.

$\boldsymbol{f(0) = 1}$ $\quad \boldsymbol{f(-1) = -3}$ **on peut conclure que la solution recherchée se trouve dans l'intervalle** $[-\mathbf{1}, \mathbf{0}]$**.**

On dit qu'on a fait une localisation des solutions.

Comment calculer cette solution ?

Remarque 2 :

En général les méthodes numériques donnent une valeur approchée de la solution.

Si la solution de l'équation est égale à α , le calcul numérique va nous donner une valeur approchée β de α. La différence $|\alpha - \beta|$ **est appelée erreur d'approximation.**

Remarque 3 :

Le calcul d'une valeur approchée de la solution α est basé sur la construction d'une suite numérique x_n **qui converge vers α.**

$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots$

Exemple de suite numérique :

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1}$$

$\alpha_0 = 1 , \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \alpha_n = \frac{1}{n+1}, \ldots \to 0$

La solution qu'on cherche α se trouve dans l'intervalle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ **.**

Toutes les méthodes numériques qu'on va étudier sont basées sur l'idée de construire une suite (x_n) qui converge vers la solution cherchée **α.**

Ces méthodes donnent une valeur approchée x_n **de la solution α.**

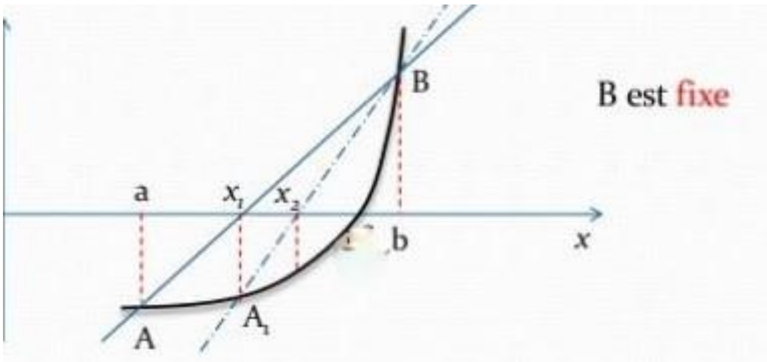
L'écart entre la solution cherchée et la valeur approchée calculée est appelé erreur d'approximation e_n=$|x_n - \alpha|$

1- Méthode de la sécante pour la résolution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$

où $\boldsymbol{f}$ **est une fonction donnée.**

La solution qu'on cherche α se trouve dans l'intervalle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ **.**

Description de la méthode :



On note : $A: (a, f(a))$ **,** $B\ (b, f(b))$.

A et B sont deux points de la courbe représentative de la fonction.

$A: (a, f(a))$ $B\ (b, f(b))$ **La droite (A,B) coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est noté** x_1.

On note $A_1: (x_1, f(x_1))$ **La droite (**A_1**,B) coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est noté** x_2.

On note $A_2: (x_2, f(x_2))$ **La droite (**A_2**,B) coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est noté** x_3.

$B\ (b, f(b))$.

On note $A_n: (x_n, f(x_n))$ **. La droite (**A_n**,B) coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est noté** x_{n+1}.

Question : Pouvez-vous calculer x_{n+1} **en fonction de** x_n **, de la fonction** f **, de** a **et de** b **?**

$x_0 = a,$

Equation d'une droite dont on connait deux points. y=px+m

y-f(x_n**)** $= p(x - x_n)$ **p= pente de la droite =** $\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}$

Equation de la droite (A_n**,B) : y-f(**x_n**)** $= \frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}(x - x_n)$

Equation de l'axe des abscisses : $y = 0$

Pour $y = 0$ **on a** $x = x_{n+1}$

On a alors :

$-f(x_n) = \frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}(x_{n+1} - x_n)$ **d'où :** $-f(x_n)(b - x_n) = (f(b) - f(x_n))(x_{n+1} - x_n)$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} = \frac{x_n f(b) - x_n f(x_n) - f(x_n)b + f(x_n)x_n}{f(b) - f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = \frac{b f(x_n) - x_n f(b)}{f(x_n) - f(b)}$$

On obtient une suite récurrente.

La suite (x_n) converge vers la solution α de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

La solution qu'on cherche α se trouve dans l'intervalle $[a, b]$ et est l'unique solution dans cet intervalle.

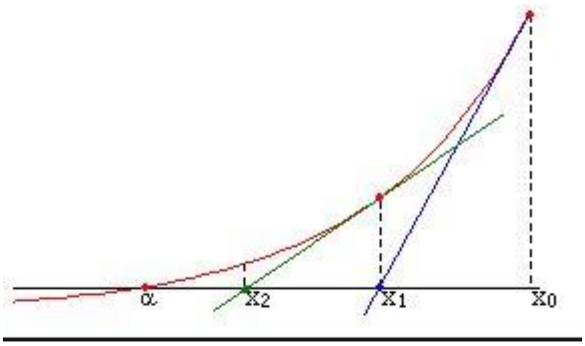
Si $f'(x)f''(x) > 0$ on choisit $x_0 = a$

Si $f'(x)f''(x) < 0$ on choisit $x_0 = b$

2- Méthode de Newton :

Deuxième méthode pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On suppose qu'on a trouvé un intervalle $[a, b]$ contenant une seule solution α de cette équation.



La tangente au point B est la droite qui passe par et dont la pente est égale à

$f'(b) = f'(x_0)$.

Pente de la tangente au point $B(x_0, f(x_0))$ est égale à $f'(x_0)$.

Description de la méthode.

$A: (a, f(a))$, $B\ (b, f(b))$ **La solution qu'on cherche α se trouve dans l'intervalle $[a, b]$**

A et B sont deux points de la courbe représentative de la fonction.

On considère la tangente à la courbe y=f(x) au point B.

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est notée x_1.

On considère le point B_1 la courbe y=f(x) d'abscisse x_1.

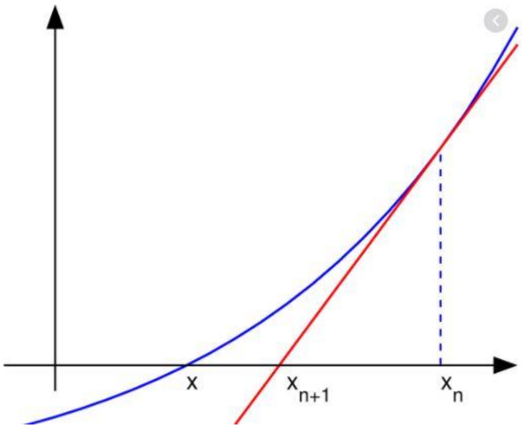
B_1 $(x_1, f(x_1))$.

On trace la tangente à la courbe en B_1.

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est notée x_2.

On considère le point B_2 la courbe y=f(x) d'abscisse x_2.

Comment on passe de x_n à x_{n+1} ?



On trace la tangente à la courbe en B_n où $B_n(x_n, f(x_n))$.

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est notée x_{n+1}.

L'équation de la tangente en un point.

Pente de la tangente en $B_n = f'(x_n)$

$y = px + m$ où p est la pente de la droite et m est l'ordonnée à l'origine.

$$y = f'(x_n)x + m$$

Comment déterminer m ?

La tangente en B_n passe par le point B_n.

L'équation de la tangente à la courbe en B_n :

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

$y = 0$ équation de l'axe des abscisses

$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$ d'où $x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$. On a alors :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Avec $x_0 = b$ pour ce cas. Dans ce cas, la fonction est croissante et convexe.

Ce cas correspond à $f'(x)f''(x) > 0$.

En général, pour la méthode de Newton :

Si $f'(x)f''(x) > 0$ alors $x_0 = b$ f croissante et convexe ou f décroissante et concave

Si $f'(x)f''(x) < 0$ alors $x_0 = a$ f croissante et concave ou f décroissante et convexe

Remarques :

- **Pour pouvoir appliquer la méthode de Newton la fonction f doit être dérivable et la dérivée ne doit pas s'annuler.**
- **La méthode de Newton est plus rapide que la méthode de la sécante.**

Application à l'exemple : $f(x) = x^3 + 3x + 1 = 0$

On a : $f(-1) = -3$ et $f(0) = 1$

La solution α de l'équation $f(x) = 0$ se trouve dans l'intervalle $[-1, 0]$.

1) Méthode la sécante

- Choix de x_0 .

On doit calculer $f'(x)f''(x)$ pour $x \in [-1, 0]$ a=-1 , b=0

$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, $f''(x) = 6x < 0$, donc $f'x)f''(x) < 0$

$x_0 = 0$

- Trois premiers termes de la suite x_1 , x_2 , x_3

Etablir la formule pour la méthode de la sécante dans ce cas (à faire exercice)

On note B_n: $(x_n, f(x_n))$. La droite (A, B_n) coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est noté x_{n+1}.

$x_0 = b$

y-f(x_n) $= p(x - x_n)$ p= pente de la droite = $\frac{f(a)-f(x_n)}{a-x_n}$

y=0 nous donne x_{n+1}

$-f(x_n) = \frac{f(a)-f(x_n)}{a-x_n}(x_{n+1} - x_n)$, on a alors :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)} = \frac{x_n f(a) - x_n f(x_n) - f(x_n)a + f(x_n)x_n}{f(a)-f(x_n)} = \frac{x_n f(a) - af(x_n)}{f(a)-f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(a) - af(x_n)}{f(a) - f(x_n)}$$

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{x_0 f(-1)+f(x_0)}{f(-1)-f(x_0)} = \frac{1}{-3-1} = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{x_1 f(-1)+f(x_1)}{f(-1)-f(x_1)} = \frac{\frac{3}{4}+f(-\frac{1}{4})}{-3-f(-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{15}{64}}{-3-\frac{15}{64}} = -\frac{63}{207}$ < -1/4

2) Méthode de Newton

- Choix de x_0

On a $f'x)f"(x) < 0,\ on\ doit\ choisir\ x_0 = -1$

- Trois premiers termes de la suite x_1 , x_2 , x_3

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\prime(x_0)} = -1 + \frac{3}{6} = -0.5$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f\prime(x_1)} = -0.5 + \frac{4}{24} = -0.5 + \frac{1}{6} = -0.33 = -\frac{1}{3}$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f\prime(x_{12})} = -\frac{1}{3} - \frac{f(-\frac{1}{3})}{f\prime(-\frac{1}{3})} = \ldots$

Dans la suite de ce chapitre, on va étudier le problème de la convergence des suites récurrentes définies par la donnée de x_0 et d'une relation :

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

où g est une fonction donnée.

La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant appelé théorème du point fixe.

Définition

Soit g une fonction d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est strictement contractante si :

Il existe un nombre $L < 1$ tel que $|g(y) - g(x)| \leq L\ |y - x|$, ∀ x, y ∈$[a, b]$.

Propriétés :

1) Si la fonction g est dérivable et s'il existe $L < 1$ tel que $|g'(x)| \leq L$, ∀ x ∈$[a, b]$ alors est g est strictement contractante.

2) Une fonction strictement contractante est continue.

Théorème du point fixe :

Si g est une fonction d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1- $g([a,b]) = \{g(x), \forall x \in [a,b]\} \subset [a,b]$

2- la fonction g est strictement contractante sur $[a,b]$,

Alors la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \; donné \; dans \; [a,b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

est convergente et sa limite β vérifie $g(\beta) = \beta$.

Démonstration :

La convergence de la suite est démontrée dans le document envoyé.

On va montrer ici que $g(\beta) = \beta$.

On a : $x_n \to \beta$

alors $x_{n+1} \to \beta$

D'autre part : $g(x_n) \to g(\beta)$ puisque g est strictement contractante et par suite continue.

On a alors:

$$\beta \leftarrow x_{n+1} = g(x_n) \to g(\beta)$$

Par conséquent $g(\beta) = \beta$

Exemple

Exercice 2 de la série

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - x$.

On considère l'équation :

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

1) Faire l'étude de la fonction f et en déduire que l'équation (1) admet une solution unique dans IR.

$f(x) = e^{-x} - x$.

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ la fonction f est décroissante.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

La fonction s'annule une seule fois. L'équation (1) admet une solution unique.

2) Déterminer un intervalle $[n, n+1]$ contenant cette solution, où est n un nombre entier à déterminer.

$f(x) = e^{-x} - x.$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \ 0.367 - 1 < 0$

La fonction s'annule dans l'intervalle $[0,1]$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$ où $g(x) = \ e^{-x}$.

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow g(x) = x$

4) On considère la suite (y_n) définie par :

$$\begin{cases} y_0 = 0,5 \\ y_{n+1} = g(y_n) \quad \forall\, n \geq 0 \end{cases}$$

Cette suite est-elle convergente ?

Pour répondre à cette question, essayez d'utiliser le théorème du point fixe.

Deux hypothèses à vérifier :

1- $g\ ([0,1]\ ) \subset [0,1]$ … oui

On a $g(x) = \ e^{-x}$ alors $g'(x) = \ -e^{-x} < 0$ g est décroissante , ce qui implique que g $([0,1]) = [g(1), g(0)] = [0.367, 1] \subset [0,1]$

2- La fonction g est strictement contractante sur $[0,1]$, non

On remplace $[0,1]$ par $[0.1,1]$

1) Si la fonction g est dérivable et s'il existe $L < 1$ tel que

$|g'(x)| = e^{-x} \ \leq L = \ e^{-0.1} \ = 0.904 < 1$ **,**

$\forall$ x $\in [0.1,1]$ alors est g est strictement contractante.

D'après le théorème du point fixe la suite (y_n) est convergente.

Si la fonction g est dérivable et s'il existe $L < 1$ tel que $|g'(x)| \leq L$, $\forall$ x $\in [a,b]$ alors est g est strictement contractante.

$|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})| = e^{-x} \leq 1$ pour $x = 0$ on a $|\boldsymbol{g}'(\mathbf{0})| = e^{-x} = e^{0} = 1$

Pour contourner cette difficulté on change d'intervalle ; on va chercher la solution dans l'intervalle $[\mathbf{0.1}, \mathbf{1}]$. **Dans ce cas :**

$|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})| = e^{-x} \leq e^{-0.1}$=0.904 = L < 1

$\boldsymbol{g}$ **(**$[\mathbf{0.1}, \mathbf{1}]$**=** $[\boldsymbol{g}(\mathbf{1}), \boldsymbol{g}(\mathbf{0.1})]$**=**$[\mathbf{0.367}, \mathbf{0.904}] \subset [\mathbf{0.1}, \mathbf{1}]$

Conclusion : d'après le théorème du point fixe, la suite (y_n) est convergente.

Si oui, que vérifie sa limite, et déterminer une valeur approchée de la solution avec une précision de 0.01.

$$\begin{cases} y_0 = 0{,}5 \\ y_{n+1} = g(y_n) \quad \forall\, n \geq 0 \end{cases}$$

On a : $y_n \to \alpha$

D'une part on aura :

$y_n \to \alpha \ \Rightarrow \ y_{n+1} \to \alpha$

g **Contractante** $\Rightarrow$ g **continue. On a alors :**

$y_{n+1} = g(y_n) \to g(\alpha)$

On en déduit que $g(\alpha)$= α

$$\begin{cases} y_0 = 0{,}5 \\ y_{n+1} = g(y_n) = e^{-y_n} \quad \forall\, n \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1 = e^{-0.5} = 0.606$$

$$y_2 = e^{-0.606} = 0.545$$

$$y_3 = e^{-0.545} = 0.579$$

$$y_4 = e^{-0.579} = 0.560$$

$$y_5 = e^{-0.560} = 0.571$$

$$y_6 = e^{-0.571} = 0.564$$

$$y_7 = e^{-0.564} = 0.568$$

$$y_8 = e^{-0.568} = 0.566$$

$$y_9 = e^{-0.566} = 0.567$$

$y_{10} = e^{-0.567} = g(0.567) = 0.567$

5) Montrer que l'équation $f(x) = e^{-x} - x = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où $h(x) = -lnx$.

$$e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow ln(e^{-x}) = lnx$$

$$\Leftrightarrow -x = lnx \Leftrightarrow x = -lnx = h(x)$$

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow ln(e^{-x}) = lnx \Leftrightarrow -x = lnx \Leftrightarrow x = -lnx = h(x)$

6) On considère la suite (y_n) définie par :

$$\begin{cases} y_0 = 0,5 \\ y_{n+1} = h(y_n) \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Cette suite est-elle convergente ? Si oui, que vérifie sa limite ?

Deux hypothèses à vérifier :

1- h ($]0,1]$)={$-lnx$, $\forall x \in]0,1]$} =[$0,+\infty$[n'est pas inclus dans $]0,1]$.

h ($]0.1,1]$)={$-lnx$, $\forall x \in]0,1]$} = $[0, -ln(0.1)[= [0, 2.3[$ n'est pas inclus dans $]0.1,1]$

2- $h(x) = -lnx$ sa dérivée est égale à $h'(x) = -\frac{1}{x}$ et $|h'(x)|$= $\frac{1}{x}$ n'est pas inférieur à 1 pour tout $x \in]0.1,1]$.

Les hypothèses du théorème du point fixe ne sont pas vérifiées. Le théorème ne s'applique pas et la convergence de la suite n'est pas assurée. Calculons quand même les termes de la suites.

$y_1 = h(y_0) = -ln0,5$ **=0.69**

$y_2 = h(y_1) = -ln0,69$ **=0.37**

$y_3 = h(y_2) = -ln0,37$ **=0.994**

$y_4 = h(y_3) = -ln0,0.994$ **=0.006**

$y_5 = h(y_4) = -ln0,0.006$ **=0.006=5.11**

$y_6 = 1.63$

$y_7 = -0.48$

Impossible de poursuivre le calcul des termes de la suite puisque $y_7 < 0$

7) Donner une relation entre les termes x_{n+1} et x_n de la suite (x_n) obtenue par la méthode de Newton pour résoudre l'équation (1).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

8) Justifier le choix de x_0 et calculer les trois premiers termes x_1, x_2 et x_3 obtenus par la méthode de Newton.

Choix de x_0

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-x} - x \ , f'(x) = -e^{-x} - 1 \ , f"(x) = e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{f'(x)f"(x) == (-e^{-x} - 1)\ e^{-x} < 0}$$

x_0=0

$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.5 + \frac{0.106}{1.606}$ =0.566

$x_3 = 0.566 + \frac{0.0017}{1.567} =$ 0.567

9) Ecrire et exécuter un programme permettant de calculer les termes des suites (x_n) et (y_n) et comparer les résultats obtenus par les deux méthodes pour la même valeur de n.

<u>Exercice n°3 de la série</u>

On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$ où f est la fonction définie par :

$f(x) = e^{-x} - x + 1 \Leftrightarrow g(x) = x$

1) Etudier la fonction f.

Domaine de définition : $\mathbb{R}$.
Continuité : f est continue sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ **et** $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) Est-ce que l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions ?

D'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution qu'on notera α.

3) Déterminer un intervalle [a,b] qui contient α.

$$f(0) = e^{-0} - 0 + 1 = 2$$

$$f(1) = e^{-1} - 1 + 1 = e^{-1} > 0$$

$$f(2) = e^{-2} - 2 + 1 = e^{-2} - 1 < 0$$

La fonction s'annule en un point α $\in[1,2]$.

4/ On considère l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0 \in [1,2]} \\ \boldsymbol{x_{n+1} = 1 + e^{-x_n} = g(x_n)} \end{cases}$$

L'algorithme converge-t-il ? OUI ou NON ?

Théorème du point fixe :

Si g est une fonction d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1- g ($[a,b]$) = $\{g(x), \forall x \in [a,b]\} \subset [a,b]$

2- la fonction g est strictement contractante sur $[a,b]$,

Alors la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0 \text{ donné dans } [a,b]} \\ \boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)} \end{cases}$$

est convergente et sa limite β vérifie $g(\beta) = \beta$.

Vérification des deux hypothèses du théorème du point fixe sachant que, dans ce cas :

$\boldsymbol{g(x)} = \mathbf{1} + e^{-x}$

1ère hypothèse : Déterminons : g ($[1,2]$) . On a : $g'(x) = -e^{-x} < 0$. La fonction est donc décroissante et par conséquent :

$$\boldsymbol{g([1,2]) = [g(2), g(1)] = [1.135, 1.367] \subset [1,2].}$$

2ème hypothèse : g est strictement contractante sur $[1,2]$.

$$|\boldsymbol{g'(x)}| = |-e^{-x}| = e^{-x}$$

On a alors :

$\max\limits_{x\in[1,2]} |\boldsymbol{g'(x)}| = e^{-1} = 0.367<1$

Conclusion : la suite (x_n) est convergente.

On a alors :

$$x_n \to \beta \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n) \to \beta$$

$$g(x_n) \to g(\beta)$$

On en déduit que $g(\beta) = \beta$

Dans le cas de l'exercice, on aura : $g(\beta) = 1 + e^{-\beta} = \beta$

On en déduite que :

$$f(\beta) = e^{-\beta} - \beta + 1 = 0$$

Autrement dit, on aura $\beta = \alpha$

Si oui, déterminer une valeur approchée de la solution avec une précision de 0.01

$$\begin{cases} x_0 \in [1,2] \\ x_{n+1} = 1 + e^{-x_n} = g(x_n) \end{cases}$$

$x_0 = 0.5$

$x_1 = 1 + e^{-x_0} = 1.606$

$x_2 = 1 + e^{-x_1} = 1.200$

$x_3 = 1 + e^{-x_2} = 1.301$

$x_4 = 1 + e^{-x_3} = 1.272$

$x_5 = 1 + e^{-x_4} = 1.280$

$x_6 = 1.278$

$x_7 = 1.278$

$$\alpha \simeq \mathbf{1.278}$$

Question supplémentaire :

Que donne la méthode de Newton ?

$$f(x) = e^{-x} - x + 1 = 0$$

$\alpha \in [1,2]$

Choix de x_0.

Rappelons que :

Si $f'(x)f''(x) > 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ on choisit $x_0 = b$

Si $f'(x)f''(x) < 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ on choisit $x_0 = a$

$f'(x) = -e^{-x} - 1,\ f''(x) = e^{-x}, \Rightarrow f'(x)f''(x) < 0 \Rightarrow x_0 = a = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 + \frac{e^{-1}}{e^{-1} + 1} = 1.268$$

$x_2 = 1.268 + \frac{e^{-1.268} - 1.268 + 1}{e^{-1.268} + 1}$ **= 1.270**

$x_3 = 1.270 + \frac{e^{-1.270} - 1.270 + 1}{e^{-1.270} + 1}$ **=** $1.270 + \frac{0.280 - 1.270 + 1}{0.280 + 1} =$ **1.278**

α≃1.278

On a alors le même résultat que celui obtenu par la méthode de la question précédente mais en 3 itérations seulement.

Conclusion : la méthode de Newton est plus rapide.