Bac Maths 2024 Principale

epsilon.tn

March 2025

Exercice 1 (4.5 points)
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $2\sqrt{3}z^2 - (7 - i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - 2i = 0$.

1. a) Vérifier que $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est une solution de (E).
   b) Déterminer l'autre solution sous forme exponentielle.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, ζ est le cercle de centre O et de rayon 1 et P est un point de ζ d'affixe $z_P = e^{i\theta}$, où θ est un réel de $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$.
   a) Construire le point Q d'affixe $z_Q = e^{i(\frac{\theta}{6})}$.
   b) La tangente à ζ en Q coupe la droite (OP) au point M d'affixe z_M. Montrer que $z_M = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$.
   c) Construire le point N d'affixe $z_N = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
   d) Vérifier que les points M et N sont distincts.

3. a) Montrer que $z_M - z_N = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}$.
   b) Montrer que $z_M - z_Q = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i(\theta+\frac{\theta}{6})}$.
   c) Pour quelle valeur de θ, le triangle MNQ est-il rectangle en M ?

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, le triangle ABC est isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$, J est le milieu du segment $[AC]$, I est le point tel que $AI = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

K est le point tel que le triangle AJK est isocèle en A et $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{5\pi}{6}$, $\langle$ l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, et $\mathcal{S}$ la similitude directe telle que $\mathcal{S}(B) = I$ et $\mathcal{S}(I) = K$.

1. Justifier que $\langle \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \langle$.

2. a) Déterminer $\langle \circ \mathcal{R}(B)$.
   b) Vérifier que $\langle(I) = J$.
   c) Montrer que $\mathcal{S} = \langle \circ \mathcal{R}$.
   d) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})$.

3. Soit $E = \mathcal{S}(K)$.

   a) Montrer que $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KE}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
   b) Déterminer $\mathcal{S}^2(B)$. En déduire que les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.
   c) Construire le point E.

4. Soit $\}$ la similitude indirecte telle que $\}(B) = E$ et $\}(I) = K$. On note Ω le centre de $\}$.

   a) Déterminer le rapport de $\}$.
   b) Déterminer $\}(\Omega)$. En déduire que Ω est le symétrique de B par rapport à K.

5. Soit F le milieu du segment $[IJ]$.

   a) Montrer que $F = g(K)$.
   b) Justifier que $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KF}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
   c) En déduire que le triangle KEF est équilatéral.

Exercice 3 (7 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = x - (x-1)\ln(x+1)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ et déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à (C).

2) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-2}{x+1} - \ln(x+1)$.

3) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f' :

$f'(x)$	x	-1	$+\infty$
	$f'(x)$	$-\infty$	$+\infty$

   a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1, +\infty[$ une unique solution α telle que $1.3 < \alpha < 1.4$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f. (On précisera $f(0)$ et $f(1)$).

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $\alpha = 1.35$).

e) Montrer que pour tout $x > 1$, $\int_0^x f(t)(t+1)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}(2x^3 - 3x^2)ln(x + 1) + \frac{1}{4}(6x^2 - x)$.

f) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, et $y = 0$.

B/ Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$a_n = \int_0^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x$$

a) Justifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) < 2 - \ln 2$. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n < (2 - \ln 2)^n$$

et

$$a_n > (1 - \ln 2)^n.$$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n = (1 - \ln 2)^n + O(\frac{1}{n})$$

et

$$a_n = (2 - \ln 2)^n - O(\frac{1}{n}).$$

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Exercice 4 (3.5 points)

1. Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $5u - 53v = 24$.

   (a) Vérifier que $(26, 2)$ est une solution de (E).

   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

2. Soit $x \in \mathbb{Z}$.

   (a) Déterminer les restes modulo 5 de $x^2 - x$.

   (b) Montrer que $(x - 27)^2 \equiv x^2 - x - 13 \pmod{53}$.

3. On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) :

$$(S) : \begin{cases} x^2 - x \equiv 1 \pmod{5} \\ x^2 - x \equiv 13 \pmod{53} \end{cases}$$

(a) Montrer que x est une solution de (S) si et seulement si, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\begin{cases} x = 3 + 5u \\ x = 27 + 53v \end{cases}$$

(b) Déterminer les solutions du système (S).

4. Déterminer dans $\mathbb{Z}$, les solutions de l'équation $x^2 - x - 66 \equiv 0 \pmod{265}$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : .... Signatures des surveillants
Nom et Prénom : ....
Date et lieu de naissance : ....

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

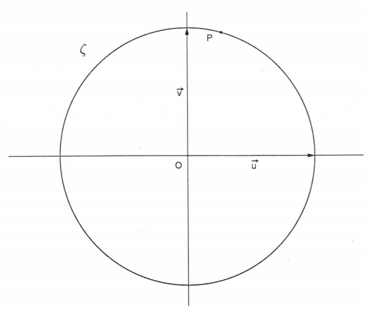

Figure 1:

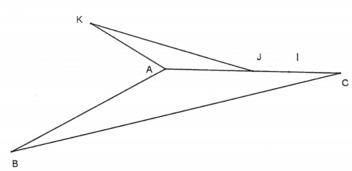

Figure 2: