Bac 2024 Sc. Exp. Principale

Transrit par epsilon.tn

March 2025

Exercice 1 (4 points)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 3(\sqrt{3}+i)z + 4(1+i\sqrt{3}) = 0$.
   (a) Vérifier que $(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$.
   (b) Résoudre l'équation (E).
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}+i$, $z_B = 2z_A$ et $z_D = (1+i)z_A$.

   Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a placé les points A et B.

   (a) Vérifier que $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$.
   (b) Montrer que BAD est un triangle rectangle et isocèle.
   (c) Écrire z_A sous forme exponentielle.
   (d) Donner alors l'écriture de z_D sous forme exponentielle.
   (e) Montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$.
   (f) En déduire qu'il existe un unique réel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan\theta = \frac{1}{2}$.
   (g) Soit E le point d'affixe $z_E = 2 + i$ et H son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{u})$. Calculer $\frac{HE}{OH}$.
   (h) En déduire que $z_E = \sqrt{5}e^{i\theta}$.
   (i) Soit C le point d'affixe z_C tel que ABCD est un carré.
   (j) Montrer que $z_C = (2+i)z_A$.
   (k) Donner à l'aide de θ l'écriture exponentielle de z_C.

Exercice 2 (4 points)

Dans une région, 25% des chevaux sont touchés par une maladie contagieuse. Un test aide à la détection de cette maladie.

- Si le cheval est malade, le test est positif dans 96% des cas.
- Si le cheval n'est pas malade, le test est négatif dans 92% des cas.

1. On choisit au hasard un cheval de cette région. On considère les événements suivants:

   - M : "Le cheval est malade" et $\overline{M}$: "Le cheval n'est pas malade".
   - T : "Le test est positif" et $\overline{T}$: "Le test est négatif".

   (a) Donner les probabilités $P(M)$, $P(T/M)$ et $P(\overline{T}/\overline{M})$.

   (b) Montrer que $P(T) = 0,3$.

   (c) Calculer la probabilité que le cheval choisi soit malade sachant que son test est positif.

2. Un fermier de cette région possède un troupeau de 5 chevaux.

   Pour dépister la maladie dans ce troupeau, il procède comme suit: Le fermier choisit au hasard un cheval et effectue le test.

   - Si le cheval est testé positif, le fermier s'arrête de tester et vaccine les 5 chevaux.
   - Si le cheval est testé négatif, le fermier teste un deuxième cheval. Si le deuxième cheval est testé positif, le fermier s'arrête de tester et vaccine les 5 chevaux. Si le deuxième cheval est testé négatif, le fermier teste un troisième cheval et continue à procéder de la même manière jusqu'à ce qu'il obtienne un cheval testé positif, s'il existe.
   - Si les 5 chevaux sont testés négatifs alors ils ne seront pas vaccinés.

   Pour un seul cheval, le test de dépistage coûte 10 dinars et le vaccin coûte 40 dinars. Soit X l'aléa numérique égal à la dépense du fermier en dinars.

   (a) Calculer $P(X = 50)$.

   (b) Montrer que $P(X = 220) = 0,21$.

   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3 (7 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + 2x$ et on désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   (a) i. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement.

   (b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite $\Delta : y = 2x$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

(c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et Δ.

(d) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (e^x + 1)(2 - e^x)$.

(e) Dresser le tableau de variation de f.

(f) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions α et β telles que $-0.3 < \alpha < -0.2$ et $1.2 < \beta < 1.3$.

Exercice 4 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-2, -1, 0)$, $B(1, 3, 1)$, $C(0, 1, 1)$ et $I(1, 0, -2)$.

1. (a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   (b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

   (c) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $2x - y - 2z + 3 = 0$.

2. (a) Vérifier que le point I n'appartient pas au plan P.

   (b) Calculer le volume V du tétraèdre ABCI.

3. (a) Déterminer une équation de la sphère (S) de centre I et tangente à P.

   (b) Justifier que le point H(-1, 1, 0) est le point de contact de (S) et P.

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IH).

4. Soit ζ le cercle du plan P de centre H et tangent à la droite (AC).

   (a) Montrer que le cercle ζ est de rayon r = 1.

   (b) Montrer qu'il existe un point M de la droite (IH), distinct de I, tel que la distance d(M,P) de M à P est égale à 3.

   (c) En déduire que les deux sphères de centres respectifs M et I et de rayon R = $\sqrt{10}$ coupent P suivant le cercle ζ.

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

figure 1

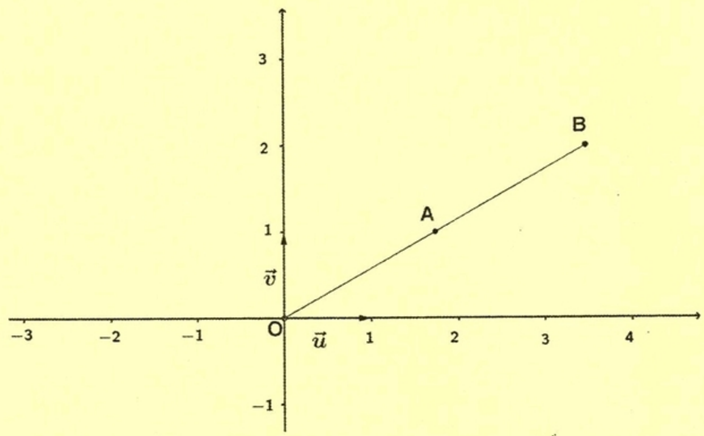

figure 2