Bac 2021 Maths Principale

Transcrit par epsilon.tn

March 2025

Source: http://www.bacweb.tn/bac/2021/principale/math/math.pdf

Exercice 1 (5.5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure de l'annexe jointe, $OABC$ est un rectangle de centre I tel que

$$OC = 1, \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{et} \quad D \text{ est le point du segment } [OA] \text{ tel que } OD = OC.$$

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur I et D sur B.

   b) Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

   c) On note Ω le centre de f. Construire Ω.

2. Soit g l'antidéplacement qui envoie O sur I et D sur B.

   a) Montrer que g est une symétrie glissante.

   b) Soit J le milieu du segment $[OI]$ et K le milieu du segment $[BD]$. Les droites (JK) et (OA) se coupent au point E. Montrer que $g(E) = J$.

   c) En déduire que $g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{EJ}}$.

3. a) Montrer que $f^{-1} \circ g = S_{(OA)}$. En déduire que $f(E) = J$.

   b) Comparer OE et OJ. En déduire que les droites $(O\Omega)$ et (JK) sont perpendiculaires.

   Dans la suite, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$. On note z_I, z_J et z_K les affixes respectives des points I, J et K.

4. a) Justifier que $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   b) Montrer que $z_K - z_J = \cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

   c) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{JK})$.

5. Soit M un point de la droite (JK). On désigne par N le symétrique de M par rapport à (OA) et par P l'image de M par g.

   a) Soit r la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. Montrer que $r(M) = N$.

   b) En déduire que $f(N) = P$.

Exercice 2 (4 points)

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1 + 20n \pmod{100}$.

   b) En déduire les deux derniers chiffres de l'entier 2021^{2021}.

   On note E l'ensemble des entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \equiv 1 + n(x-1) \pmod{100}.$$

2. Vérifier que 21 est un élément de E.

3. Soit x un élément de E.

   a) Montrer que $(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{100}$.

   b) En déduire que $x \equiv 1 \pmod{10}$.

4. Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+10q)^n \equiv 1 + 10nq \pmod{100}$.

5. Déterminer l'ensemble E.

Exercice 3 (6 points)

1. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

   a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

   b) Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.

   c) Dresser le tableau de variation de φ.

   d) Tracer la courbe (C), en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

2. Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

   Soit φ_n la fonction définie sur $]-n, +\infty[$ par $\varphi_n(x) = \frac{1+\ln(x+n)}{x+n}$. On désigne par (C_n) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) En remarquant que $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$, montrer que (C_n) est l'image de (C) par une translation que l'on précisera.

   b) Tracer (C_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Soit h_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$.

   a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $h_n(x) < 0$.

   b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, $h'_n(x) < 0$.

   c) En déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution a_n, et vérifier que $\frac{1}{e} < a_n < 1$.

4. a) Montrer que $n + 1 + a_{n+1} > n + a_n$.

   b) Comparer $\varphi(a_{n+1})$ et $\varphi(a_n)$.

   c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   d) Justifier que $\lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 (4.5 points)

1. Soit F et H les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad H(x)=\frac{4}{e}-2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}.$$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner $F'(x)$.

b) Montrer que pour tout $x>0$, $F'(x)=H'(x)$.

c) En déduire que $F(0)=H(0)$.

2. Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x)=\int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt$.

a) En remarquant que pour tout $t>0$, $\sqrt{t}=\frac{t}{\sqrt{t}}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $G(x)=-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$, pour tout $x>0$.

b) Justifier que $G(0)=\frac{2}{e}+2F(0)$.

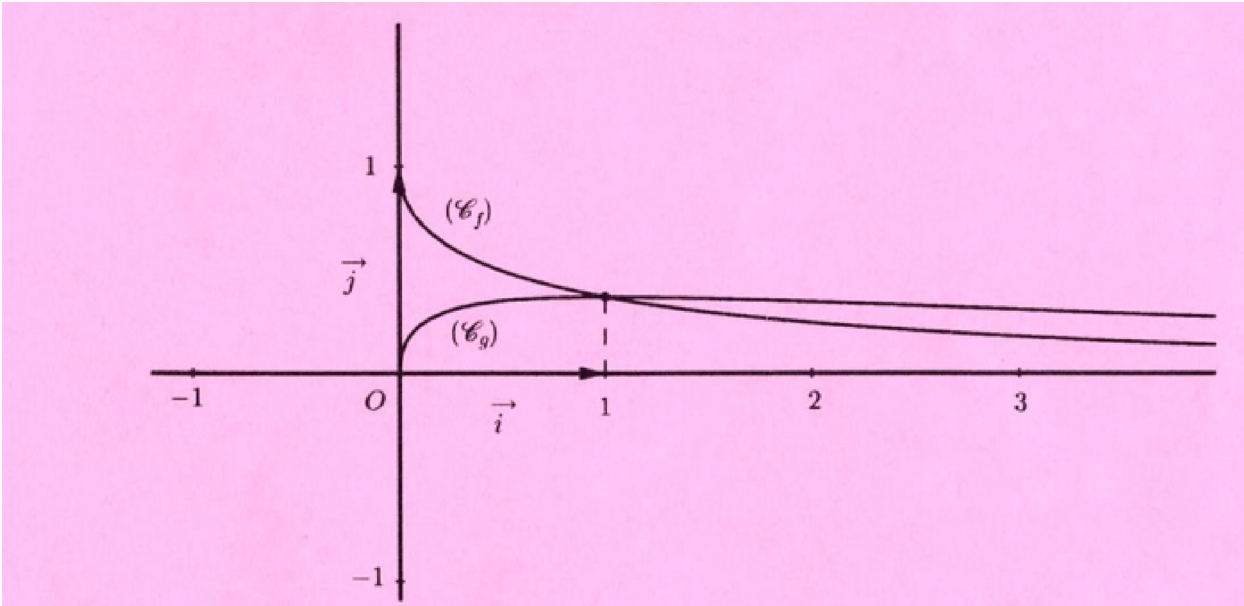
3. Ci-dessous on a tracé, dans un repère orthonormé, les courbes (C_f) et (C_g) des fonctions f et g définies sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$.

1. Pour tout $\lambda>1$, on désigne par $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_1=\frac{6}{e}-2$.

b) Montrer que pour tout $\lambda>1$, $\mathcal{A}_\lambda=G(\lambda)-F(\lambda)$.

c) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}_\lambda$.



1
$(\mathscr{C}_f)$
$\vec{j}$
$(\mathscr{C}_g)$
−1
O
$\vec{i}$
1
2
3
−1

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2021)
Annexe à rendre avec la copie