

Exercices : matrices, suites de fonctions et calcul de limites

Exercice 1

Étudier, suivant les valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + aby + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$$

Quelle est la matrice de ce système linéaire ?

Dans quels cas cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 2

Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}.$$

Exercice 3

On pose

$$f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \text{ pour } x \in [0; 1].$$

Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions et donner sa limite.

Exercice 4

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x \ln(1 + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{2x}$$