Suites de fonctions

Raouf Laroussi

November 2024

Exercice 1
Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$

Exercice 2
Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$ et donner sa limite f, si elle existe.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,+\infty[$, où $a>0$.
4. Calculer l'intégrale :
$$I_n = \int_0^a f_n(x)\,dx$$
5. Calculer : $\lim_{n\to\infty} I_n$ et comparer avec $I = \int_0^a f(x)\,dx$