Cours – Proba - Stat

Chapitre I - Introduction : Analyse combinatoire

Permutation

Exemple : Vous avez un groupe de 25 personnes que vous allez placer dans un bus de 25 places.

Questions : de combien de manières différentes peut-on installer les 25 personnes ?

Réponse : 25x24x23 ….x 2x1 = 25 !

Ali - Mohamed – Salah – Faten -

Le nombre de possibilités est ce qu'on appelle le nombre de permutations possibles.

Définition : On appelle permutation des éléments de E toute application bijective de E dans B.

Le nombre de permutations dans un ensemble de n éléments est égal à n! = 1x2x3x … x n

Arrangement

Exemple : Une course regroupe 30 coureurs. On cherche à savoir quelles sont toutes les possibilités pour former le trio vainqueur en tenant compte du classement.

1^{er} Ali 30 possibiltés

$2^{ème}$ Mohamed 29 possibilités

$3^{ème}$ Salah 28 possibilités

1^{er} Mohamed 30 possibiltés

$2^{ème}$ Ali 29 possibilités

$3^{ème}$ Salah 28 possibilités

Nombre de possibilités : 30 x 29 x 28

Chacune des possibilités est appelée arrangement.

Le nombre d'arrangements de 3 éléments dans un ensemble de 30 éléments est égal à 30 x 29 x 28 = $\frac{30!}{(30-3)!}$

Définition

Soit E un ensemble non vide et p un entier non nul. On appelle p-uplet tout élément de ExExE … x E (p fois)

Un p-uplet : $(e_1, e_2, e_3, \ldots., e_p)$

Supposons que E contient n éléments et p est un entier tel que 1≤p≤n, on appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet formé de p éléments de E deux à deux distincts.

Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble de n éléments est égal à : n(n-1)(n-2) … (n-p+1)= $\frac{n!}{(n-p)!}$

Notation : le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble de n éléments est noté : A_n^p

On a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Combinaison :

Dans l'exemple précédent, on s'intéresse au trio vainqueur sans tenir compte du classement. Quel est le nombre de possibilités dans ce cas ?

Réponse : ce nombre est égal à $\frac{A_{30}^3}{3!}$ = $\frac{30!}{3!(30-3)!}$

Définition :

Supposons que E contient n éléments et p est un entier tel que 1≤p≤n, on appelle combinaison de p éléments de E tout sous-ensemble formé de p éléments distincts de E.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté C_n^p et est égal à $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

On a :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque :

Par convention on pose : C_n^0 = 1. On a aussi C_n^n = 1.

Exercice :

Montrer que :

$1)\ C_n^p = C_n^{n-p}$

2) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

$C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}$$

$$= \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \frac{(n-1)!\,(p+(n-p))}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n)}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$$

Exercice 1 :

Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet dans les deux cas suivants :

a) on utilise chaque lettre une seule fois :

Il faut calculer le nombre d'arrangements.

Le nombre d'arrangements de 10 éléments dans un ensemble de 26 éléments :

$$A_{26}^{10} = \frac{26!}{16!} = 26 * 25 * 24 \ldots .* \ 17$$

b) on peut réutiliser les lettres : 26^{10}.

Exercice 2 :

La façade d'une maison compte 8 fenêtres, ces fenêtres peuvent être soit ouvertes soit fermées.

a) De combien de manière de manière différente peut se présenter cette façade

b) Même question si chaque fenêtre a deux battants ?

Réponse :

a) 2^8

b) $4^8 = 2^{16}$

Lancer deux dés : Probabilité que la somme est paire

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k}$$

$(a+b)^n$ $=C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-1} + \cdots + C_n^n a^n$

On démontre cette formule par récurrence.

Chapitre II

Probabilités

2-1 Expérience aléatoire

Définitions

1- On considère une expérience aléatoire. On appelle univers et on note Ω l'ensemble des résultats possibles de cette expérience**.**

2- Un sous-ensemble A de Ω est appelé événement.

3- Lorsque A est l'ensemble vide, on dit que l'événement est impossible.

4- Lorsque A est égal à Ω on dit que l'événement est certain.

5- Lorsque l'ensemble A est réduit à un seul élément, on dit que c'est un événement élémentaire.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire : « Lancer un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 »

Dans ce cas Ω =$\{1,2,3,4,5,6\}$ = univers

- **Un événement A : une partie A de Ω . Par exemple si on prend $A = \{1,3,5\}$ est un événement qui correspond à « obtenir un nombre impair »**
- **L'évènement B=$\{3\}$ est un événement élémentaire.**

6- Etant donné deux événements A et B, l'événement A∩B est appelé événement « A et B ». Il correspond à la

réalisation simultanée de l'événement A et de l'événement B

Soit l'événement B : « obtenir un nombre <3 » ;

B=$\{1, 2\}$

A∩B=$\{1\}$

7- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si

A∩B = l'ensemble vide

Exemple : Etant donné l'événement A : « obtenir un nombre impair » c'est-à-dire $A = \{1, 3, 5\}$

Soit C l'événement : « obtenir 4 » c'est-à-dire C=$\{4\}$

Alors les événements A et C sont incompatibles.

8- On dit que des événements $A_1, A_2, A_3, \dots . A_n$ forment un système complet d'événements si :

- **Les événements $A_1, A_2, A_3, \dots . A_n$ sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire $A_i \cap A_j$ = l'ensemble vide , ∀i≠j**
- **$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots . \cup A_n = \Omega$.**

9- Etant donné un événement A, on appelle événement contraire et on note $\overline{A}$ l'événement $\overline{A} = \Omega \setminus A$=$A^c$.

Exemple : $A = \{1, 3, 5\}$, $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$

Ω =$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exercice :

Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5.

1) On tire trois jetons du sac successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac. Donner le cardinal de l'ensemble Ω des résultats possibles de cette expérience.

Un résultat possible : (1,5,1)

Nombre de résultats possibles : $\boldsymbol{Card\,\Omega = 5^3 = 125.}$

1^er^ tirage : 1 2 3

1er tirage			**1**					**2**					**3**					**4**					**5**		
2ème tirage		**2**	**3**	**4**	**5**	**1**		**3**	**4**	**5**	**1**	**2**		**4**	**5**										

2) On tire trois jetons sans remise. Donner le cardinal de l'ensemble Ω' des résultats possibles de cette expérience. Card Ω' = 5x4x3=60.

2-2 Espace probabilisé fini

Rappel : Parties d'un ensemble Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$= toutes les parties de Ω.

Définition :

Soit Ω un ensemble fini. On appelle probabilité (ou application probabilité) toute application :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$$

vérifiant :

1- $P(\Omega) = 1$

2- Pour toutes parties A et B de Ω disjointes (c'est-à-dire telles que A∩B=$ensemble\ vide$) , on a $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

Supposons que Ω est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Exemple « lancée d'un dé ». Dans ce cas $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Une partie A de Ω est appelée événement.

Combien y-a-t-il de parties distinctes de Ω ?

L'ensemble vide est une partie de Ω.

$\{1\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{2\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\{3\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{4\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\{5\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{6\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\{1, 2\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{1, 3\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\{1, 4\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{1, 5\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\{1, 6\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{2, 3\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\{2, 4\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{2, 5\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\{2, 6\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω , $\{3, 4\}\subset \Omega$ **c'est une partie de** Ω.

$\mathcal{P}(\Omega)=$
$\left\{\boldsymbol{Ensemble\ vide}, \{1\}, \{2\} \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\} \dots\dots, \{1, 2, 3\}, \{3, 2, 4\} \dots\dots, \Omega\right\}$

Card $\Omega = n$

Card $\mathcal{P}(\Omega)= 2^n$

Dans l'exemple précédent : Card $\Omega = 6$.

On a alors : Card $\mathcal{P}(\Omega)= 2^6=64$

Démonstration : Comptons les parties de Ω

Ensemble vide → 1 **Les singletons → 6**

Les ensembles contenant 2 éléments → C_6^2 **Les ensembles contenant 3 éléments → C_6^3**
Les ensembles contenant 4 éléments → C_6^4 **Les ensembles contenant 5 éléments → C_6^5**

Les ensembles contenant 6 éléments → $C_6^6 = 1$

Nombre de parties de Ω= $1+C_6^1+C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + 1$

$$2^6 = (1 + 1)^6 = 1 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + 1$$

Propriétés :

1- $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

2- **P(ensemble vide)=0**

3- $\boldsymbol{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$

4- $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

On démontrera ces propriétés la prochaine fois.

Définition : équiprobabilité

On dit que l'application probabilité P est une équiprobabilité si, étant donné un ensemble $\boldsymbol{\Omega}$ tel que $\boldsymbol{Card\ \Omega = n}$, quelque soit l'événement élémentaire ω, on a $\boldsymbol{P(\omega) = \frac{1}{n}}$. Dans ce cas si A est un événement quelconque alors on a :

$$P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)}$$

Exercice :

Un sac contient 5 boules bleues, 3 boules rouges et deux boules jaunes.

On tire simultanément trois boules du sac. Donner la probabilité des événements suivants :

1- A : « Obtenir trois boules bleues »

2- B : « Obtenir Trois boules de couleurs différentes »

3- C : « Obtenir au moins une boule jaune »