Tentative de preuve

Enigme : Quelle est la probabilité pour que trois points disposés aléatoirement sur un cercle se trouvent les trois dans une moitié du cercle.

N'hésitez pas à analyser cette démonstration pour détecter une éventuelle erreur.

Appelons A et B les deux premiers points disposés aléatoirement sur le cercle de centre O et de rayon 1.

1er cas : On suppose que A est sur la droite horizontale OA et que B se trouve dans le demi-cercle supérieur. L'autre cas où B est sur le demi-cercle inférieur est similaire à celui-ci et devrait donner la même probabilité.

Appelons :

- α un nombre compris entre 0 et π
- C le troisième point à placer sur le cercle
- A' le point diamétralement opposé à A
- B' le point diamétralement opposé à B
- E l'événement : A, B et C sont les trois dans un même demi-cercle/
- F l'événement B est tel que l'angle $\widehat{AOB}$ = α

Voir figure 1 ci –après.

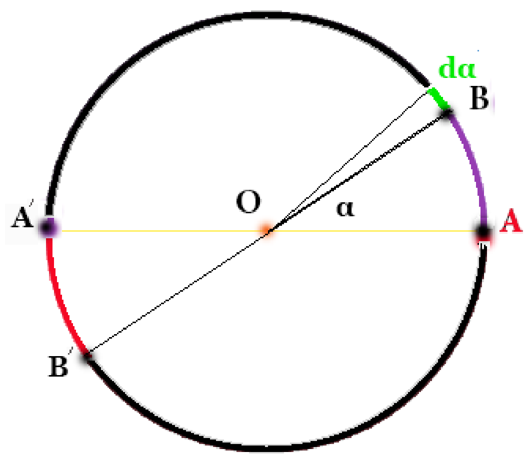

Figure 1

Dans ce premier cas, on va chercher P(E∩F) c'est-à-dire la probabilité pour que $\widehat{AOB}$ = α et A,B et C sont dans le même cercle.

Remarque importante : Une fois que B est fixé la probabilité pour que C soit dans un même demi-cercle que A et B dépendent de α et varie entre $\frac{1}{2}$ et 1. Cette probabilité est proche de 1 quand α est proche de 0 et elle est proche de $\frac{1}{2}$ quand α est proche de π.

C'est ce qui rend le calcul difficile. Il faut donc chercher la moyenne quand α varie entre 0 et π

Comme la probabilité pour que $\widehat{AOB}$ = α est nulle à cause du fait qu'il y a une infinité de point sur le demi-cercle, on va remplacer cet événement pat l'événement F' suivant :

F' : B se trouve sur l'arc de longueur dα où dα est supposé être infiniment petit.

On va chercher alors P(E∩F')

D'après la formule des probabilités conditionnelles on a :

$$\mathbf{P(E\cap F')= P(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F'})x\ P(F')}$$

Or :

$$\mathbf{P(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F'}) = \frac{2\boldsymbol{\pi}-\alpha}{2\boldsymbol{\pi}}}$$

parce que le point C peut être partout sur le cercle sauf sur la partie rouge dont la longueur est égale à α . La longueur de cet arc autorisé est donc $2\pi - \alpha$ et la probabilité pour que C s'y trouve est $\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}$ puisque la circonférence du cercle est 2π.

D'autre part, P(F')= $\frac{\boldsymbol{d}\alpha}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}$

Pour trouver P(E) on doit faire la moyenne des probabilités P($E|F'$) quand α varie de 0 jusqu'à π.

On a alors :

$$\mathbf{P(E)= \int_0^{\pi} P(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F'})x\ P(F') = \int_0^{\pi} \frac{2\boldsymbol{\pi}-\alpha}{2\boldsymbol{\pi}} \frac{\boldsymbol{d}\alpha}{2\boldsymbol{\pi}} = \int_0^{\pi} \frac{2\boldsymbol{\pi}-\alpha}{4\boldsymbol{\pi}^2} \boldsymbol{d}\alpha = \frac{3}{8}}$$

2ème cas : On suppose que A est sur la droite horizontale OA et que B se trouve dans le demi-cercle inférieur.

Le calcul est analogue au précédent et donne la même probabilité.

Comme ces deux cas sont complémentaire, on doit ajouter les probabilités pour répondre à la question initiale.

La probabilité pour que les trois points soient sur le même demi-cercle est donc $\frac{3}{4}$.