Exercices : Espace de Hilbert - Convolution

epsilon.tn

November 3, 2023

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $l^2(\mathbb{R})$:

$$l^2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire défini, pour $x = (x_n)_{n\geq 1}$ et $y = (y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de $l^2(\mathbb{R})$, par $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 1} x_n y_n$. On note $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

1- Soit $x = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite nulle à partir d'un certain rang (c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour tout $n \geq k$). Montrer que la suite $x \in l^2(\mathbb{R})$ et calculer sa norme $\|x\|_2$.
Soit $x = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite nulle à partir du rang k et $y = (y_n)_{n\geq 1}$ une suite nulle à partir du rang l et soit F le sous-espace vectoriel engendré par x et y.

2- Calculer $\langle x, y\rangle$.

3- Montrer que le sous-espace vectoriel F est fermé.

4- Soit les suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$, $z = (z_n)_{n\geq 1}$ telles que :
$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_n = 0$ pour tout $n \geq 4$
$y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$ et $y_n = 0$ pour tout $n \geq 4$
$z_1 = 1$, $z_2 = 1$ et $z_n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

a) Déterminer la projection orthogonale $\overline{z}$ de z sur le sous-espace vectoriel F engendré par les deux suites x et y, c'est dire trouver $\overline{z}$ tel que $\|z - \overline{z}\|_2 = d(z, F) = \inf_{t\in F} \|z - t\|_2$

b) En déduire les valeurs de λ et μ qui minimisent la fonction $f(\lambda, \mu) = 1+\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu-\lambda-\mu$.

Exercice 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On rappelle que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est continue et vérifie $\lim_{t \to \pm\infty} \widehat{f}(t) = 0$. On cherche, dans $L^1(\mathbb{R})$, les solutions de l'équation :

$$f * f = f \tag{1}$$

1- Soit f une solution de l'équation (1). Déterminer l'équation vérifiée par la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.

2- En déduire que la seule solution de l'équation $f * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ est la fonction nulle.

3- Montrer que le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas un élément neutre.

Exercice 3

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par $f(x) = H(x)xe^{\lambda x}$ où H est la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x > 0$.

1- Montrer que f définit une distribution sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, notée T_f.

2- Déterminer, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T_f' - \lambda T_f$.

3- Calculer $(T_f' - \lambda T_f)''$, la dérivée seconde de $T_f' - \lambda T_f$.