Exercices sur les Distributions

epsilon.tn

November 3, 2023

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si & x < -1 \\ x^2 & si & -1 \leq x < 0 \\ 0 & si & 0 < x < 1 \\ 1-x & si & x \geq 1 \end{cases}$$

1- Tracer la courbe représentative de f.

2- Préciser l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où la fonction f est dérivable au sens usuel.

3- Déterminer la dérivée de f au sens des distributions, c'est à dire $(T_f)^{'}$.

4- Déterminer la dérivée seconde de f au sens des distributions.

Exercice 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction positive telle que : $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

1- Donner un exemple d'une telle fonction.

2- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k(x) = kf(kx)$. On se propose de montrer que la suite $(f_k)_k$ converge vers la distribution de Dirac δ_0 dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)dx \to \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$$

2–a. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = 1$.

2–b. On pose $A_k = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)$ Montrer que :

$$A_k = \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx$$

2–c. En déduire que :

$$|A_k| \leq BSup \left|\varphi^{'}\right| \int_{[-B,B]} f_k(x)dx,$$

où $[-B, B]$ désigne un intervalle contenant le support de φ.

2–d. Montrer que $|A_k| \to 0$ quand $k \to +\infty$ et conclure que la suite $(f_k)_k$ converge vers la distribution de Dirac δ_0 dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.