Espace de Hilbert - Distributions

epsilon.tn

1er novembre 2023

Exercice 1

Soit un E espace préhilbertien.

Rappel : On rappelle que la norme associée au produit hermitien de E vérifie l'"*Identité du parallélogramme*" suivante :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

où x et y sont deux éléments quelconques de E.

Pour $p \geq 1, p \neq 2$, on considère l'espace des suites de nombres complexes suivant :

$$l^p(\mathbb{C}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : x_n \in \mathbb{C} \ et \ \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

muni de la norme : $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

1- En utilisant la propriété du Rappel ci-dessus, montrer qu'il n'existe pas un produit hermitien $\langle .,. \rangle$ sur $l^p(\mathbb{C})$ tel que la norme $\|.\|_p$ soit associée à ce produit hermitien.

Indication : On pourra considérer les deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$\begin{array}{c} x_0 = 1, x_1 = 1 \text{ et } x_n = 0 \text{ pour } n \geq 2 \\ \text{et} \qquad y_0 = 1, y_1 = -1 \text{ et } y_n = 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{array}$$

2- Montrer que, dans le dans le cas où $p = 2$, il existe un produit hermitien sur $l^2(\mathbb{C})$ auquel la norme est associée et préciser ce produit hermitien..

Exercice 2

Soit δ_0 la distibution de Dirac en 0 définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit Ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donner l'expression de $(\Psi\delta_0)(\varphi)$, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. Calculer la dérivée $(\Psi\delta_0)'(\varphi)$.
3. On choisit $\Psi(x) = x$.
   - **(a)** Calculer $(\Psi\delta_0)(\varphi)$
   - **(b)** Calculer directement $(\Psi\delta_0)'(\varphi)$
   - **(c)** Calculer $(\Psi\delta_0)'(\varphi)$ en utilisant le résultat de la question 2.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pour} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{pour} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que est f intégrable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de la distribution T_f associée à f .
2. Calculer la dérivée de la distribution T_f et l'exprimer à l'aide de la distribution associée à une fonction g à préciser.