Espace de Hilbert - Distribution

epsilon.tn

30 octobre 2023

Exercice 1

Soit $H = L^2([0,1])$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable. On munit H du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

et de la norme $\|.\|_2$ associée à ce produit scalaire.

On rappelle que H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

Soit $P_2([0,1])$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. On considère l'ensemble :

$$F = \{v \in P_2([0,1]) \text{ tels que } v(0) = 0 \text{ et } v"(1) = 0\}$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H de dimension finie et déterminer une base de F.

2) a) Montrer que $H = F \oplus F^{\perp}$.

b) En déduire que :

$$\forall\ f \in H, \exists g \in F \text{ unique tel que } d(f, F) = \|f - g\|_2$$

Le polynôme g est appelé projection orthogonale de f sur F.

3) Soit f définie par $f(x) = e^{-x}$, déterminer la projection orthogonale g de f sur F et calculer $d(f, F)$.

4) On considère le problème suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in F \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \ell(v),\ \forall v \in F \end{cases}$$

où $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx$ et $\ell(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$, avec f définie par $f(x) = e^{-x}$.

a) Montrer que ℓ est une forme linéaire continue.

b) Montrer que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive.

c) Déterminer la solution u du problème (1).

Exercice 2

On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1|$.

1) Montrer que l'application T_f définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $T_f\ (\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ est une distribution.

2) Déterminer la dérivée première T'_f de T_f .

3) Déterminer la dérivée seconde T''_f de T_f .