# Exercices sur les Espaces Vectoriels Normés



Octobre 2023

1. Soit $\{v_1, v_2\}$ un ensemble de deux vecteurs dans $R^2$ tels que $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$. Ce système est-il libre ? Est-il générateur de $R^2$ ?

2. Soit $W$ le sous-espace de $R^3$ engendré par $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Décrivez tous les vecteurs de $W$.

3. Étant donné un espace vectoriel $V$ de dimension finie $n$, quelle est la relation entre le nombre de vecteurs d'un système libre et le nombre de vecteurs d'une base pour $V$ ?

4. Soit $V$ l'espace des polynômes de degré $\leq 2$ et soit $\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\}$. Montrez que cet ensemble est une base pour $V$.

5. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base pour l'espace vectoriel $V$. Si $v$ est un vecteur quelconque de $V$, montrez que $v$ peut s'exprimer de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

6. Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $x, y \in E$,
$$\|x + y\| + \|x - y\| \geq 2\|x\|.$$

7. Montrer que l'ensemble $C([0, 1])$ des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ muni de la norme infinie
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
est un espace vectoriel normé.

8. Montrer que l'ensemble des suites réelles à valeurs dans $R$ muni de la norme
$$\|(x_n)\| = \sup_{n\in N} |x_n|$$
est un espace vectoriel normé.

9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que si une suite $(x_n)$ de $E$ est telle que $\|x_{n+1} - x_n\|$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, alors $(x_n)$ est une suite de Cauchy.