Espace de Hilbert - Distributions

epsilon.tn

31 octobre 2023

Exercice n°1

On considère l'ensemble $\ell^2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{R} \text{ telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

On définit sur $\ell^2(\mathbb{R})$ le produit $\langle .,. \rangle$ par $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n y_n$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1- Montrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

(On rappelle que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$)

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $k \geq 1$ un entier donné.

2- Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = 1$ si $n \leq k$ et $u_n = 0$ si $n > k$.

Montrer que $u \in \ell^2(\mathbb{R})$ et calculer $\|u\|$.

3- Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $v_n = 0$ si $n \leq k$ et $v_n = \frac{1}{n}$ si $n > k$.

Montrer que $v \in \ell^2(\mathbb{R})$ et calculer $\|v\|$.

4- Soit F le sous espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$ engendré par les suites u et v définies aux questions 1 et 2 précédentes. Soit $y \in \ell^2(\mathbb{R})$. On rappelle que $d(y, F) = \inf\limits_{x\in F} d(y, x)$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\widetilde{y} \in F$ tel que $\|y - \widetilde{y}\| = d(y, F)$.

b) On pose $\widetilde{y} = \alpha u + \beta v$. Exprimer α et β en fonction de $\langle y, u \rangle$, $\langle y, v \rangle$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Exercice n°2

Soit θ_n la suite de fonctions définies par :

$$\theta_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1- a) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n(x)dx = 1$ et que $\theta_n(x)$ possède une limite (finie ou infinie) pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner cette limite.

b) Montrer que θ_n ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$.

2- Montrer que l'application T_{θ_n} de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi \mapsto T_{\theta_n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n(x)\varphi(x)dx$ est une distribution.

3- On rappelle qu'une suite de distributions T_n de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tend vers une distribution T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque $n \to +\infty$ si $T_n(\varphi)$ converge vers $T(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $n \to +\infty$.

Montrer que T_{θ_n} tend vers δ_0 , la distribution de Dirac en 0, lorsque $n \to +\infty$.